Über Aoustsche Kurven

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

einer

Hohen Philosophischen Fakultät

der

Vereinigten Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg

vorgelegt

von

Heinrich Hampel

aus Leopoldshall (Anhalt)

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

Halle a. d. S.

Buchdruckerei des Waisenhauses

1921

Referent: Geheimer Regierungsrat Prof. Dr. A. Gutzmer.

Tag der mündlichen Prüfung: 15. Dezember 1920.

MEINEN ELTERN!

Inhalt.

Seite

Vorbemerkung 7

I. Das Aoustsche Problem und seine bisherigen Lösungen . . 9

II. Allgemeine Aoustsche Kurven 16

1. Die sphärische Abbildung der A.-Kurven 16
2. Sphärische Fußpunktkurven 17
3. Die Krümmungswinkel der Binormalen- und Tangenten-Fußpunktkurve 23
4. Beispiele 30
5. Die sphärischen Fußpunktkurven der A.-Kurven 33

III. Spezielle Aoustsche Kurven 39

1. Eindeutige Bestimmung der A.-Kurven 39
2. A.-Kurven mit der Zusatzbedingung: $\varrho = f(\sigma)$ 40
3. Beispiele 43
4. A.-Kurven mit der Zusatzbedingung: $\tau = \varphi(\sigma)$ 57
5. A.-Kurven, die einer vorgegebenen anderen Raumkurve parallel sind 59

IV. Aoustsche Schraubenlinien 61

V. Aoustsche Böschungslinien 69

Vorbemerkung.

Die sogenannten Aoustschen Kurven, bei denen zwischen der Ausgangs- und zweiten Polarkurve Kongruenz besteht, stellen der analytischen Behandlungsweise nicht unerhebliche Schwierigkeiten entgegen. Die vorliegende Arbeit schlägt aus diesem Grunde den geometrischen Weg ein, um zur Lösung dieses Problems einen Beitrag zu liefern. Wenn die gewonnenen Resultate sich auch nicht in einfachen und analytisch eleganten Ausdrücken darstellen lassen, was der Schwierigkeit der Fragestellung zuzuschreiben ist, so geben dieselben doch immerhin einen Weg, auf dem die A.-Kurven der Betrachtung leichter zugänglich sind.

Im ersten Abschnitt ist zur Orientierung das wenige zusammengestellt, was bisher über A.-Kurven gearbeitet wurde.

Das nächste Kapitel behandelt, von der sphärischen Abbildung der A.-Kurven ausgehend, zunächst einige bisher nicht behandelte sphärische Kurven, die kurz als „sphärische Fußpunktkurven“ bezeichnet sind. Ihre Eigenschaften werden sodann auf allgemeine A.-Kurven angewandt.

Der nächste Abschnitt gibt daran anschließend einen neuen Weg zur Auffindung spezieller A.-Kurven. Zur Charakterisierung der in Anwendung kommenden Methode werden einige Beispiele näher betrachtet.

Der vierte Abschnitt ist den A.-Schraubenlinien gewidmet. Die dort schon bekannten Ergebnisse werden auf einem etwas anderen Wege gewonnen und der geometrischen Anschauung näher gebracht.

Im letzten Kapitel schließlich werden noch die bisher nicht behandelten A.-Böschungslinien in den Kreis der Betrachtung gezogen.

Die Bezeichnungen sind in Anlehnung an Scheffers, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die Geometrie, und in Verbindung mit Schell-Salkowski, Allgemeine Theorie

der Kurven doppelter Krümmung, 3. Aufl., gewählt worden. Insbesondere sind, wenn nicht ausdrücklich anders bemerkt:

α, β, γ	die Richtungskosinus der Tangenten,
l, m, n	die Richtungskosinus der Hauptnormalen,
λ, μ, ν	die Richtungskosinus der Binormalen,
$d\tau, d\sigma, dk$	die Winkel der ersten, zweiten und ganzen Krümmung,
$\varrho, r, \mathfrak{r}$	die Radien der ersten, zweiten und ganzen Krümmung,
h	der Abstand des Krümmungsmittelpunktes vom Mittelpunkt der zugehörigen Schmiegungskugel,
ϱ_0, h_0 usw.	die entsprechenden Stücke der ersten Polarkurve.

Die Anregung zu den nachstehenden Untersuchungen verdanke ich meinem hochverehrten Lehrer Herrn Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. A. Gutzmer in Verbindung mit Herrn Prof. Dr. E. Salkowski, Hannover. Es sei mir an dieser Stelle gestattet, beiden Herren für das rege Interesse, das sie meiner Arbeit entgegenbrachten, und für die wertvollen Ratschläge, mit denen sie die Vollendung derselben förderten, meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen.

I.

Das Aoustsche Problem und seine bisherigen Lösungen.

Von den bemerkenswerten Kurven, die jede Kurve doppelter Krümmung begleiten, sind ihre Polarkurven am leichtesten zugänglich. Die erste Polarkurve ist der geometrische Ort der Mittelpunkte derjenigen Kugeln, welche die Kurve vierpunktig berühren. Man nennt sie aus diesem Grunde auch die Kurve der Schmiegungskugelmittelpunkte. Die zweite Polarkurve wird durch die Zentren der Schmiegungskugeln der ersten Polarkurve erzeugt. Allgemein ist die n-te Polarkurve einer Raumkurve der Ort der Mittelpunkte der Schmiegungskugeln der $(n-1)$-ten Polarkurve. Die Ausgangskurve wird dabei als Polarkurve nullter Ordnung betrachtet.

Da die Schmiegungskugeln nur einen speziellen Fall der unendlich vielen Kugeln darstellen, die durch drei konsekutive Kurvenpunkte bestimmt werden, so liegen ihre Mittelpunkte senkrecht über den entsprechenden Krümmungsmittelpunkten. Die Tangenten der ersten Polarkurve sind daher die Krümmungsachsen, d. h. die Lote, die im Krümmungsmittelpunkt auf der Schmiegungsebene errichtet sind. Die Tangenten der ersten Polarkurve sind also den Binormalen der Ausgangskurve parallel und umgekehrt. Wiederholt man das Verfahren, so erkennt man, daß die zweite Polarkurve der Ausgangskurve parallel ist. Allgemein sind alle geraden und ungeraden Polarkurven einer Raumkurve untereinander parallel.

Verbindet man zugehörige Punkte zweier paralleler Raumkurven, so erzeugt die Verbindungsgerade eine abwickelbare Regelfläche.[1]) Es folgt mithin, daß die Ausgangskurve mit ihrer zweiten Polarkurve auf einer von der Natur der Ausgangskurve abhängigen Fläche mit geraden Erzeugenden liegen muß. Schreibt man umgekehrt eine bestimmte Regelfläche vor, auf der die Ausgangskurve mit ihrer

1) Schell-Salkowski, Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung, 3. Aufl., Leipzig 1914, S. 174ff.

zweiten Polarkurve liegen soll, so werden damit bestimmte, die Allgemeinheit der Ausgangskurve einschränkende Bedingungen gegeben.

Der einfachste der hier möglichen Fälle fordert für die Ausgangs- und zweite Polarkurve einen Zylinder. In diesem Fall liegen alle Polarkurven gerader und ungerader Ordnung auf je ein und demselben Zylinder, sie sind mithin untereinander kongruent.

Der französische Mathematiker Aoust[1]) hat sich als erster mit diesem Problem beschäftigt und einen — analytischen — Weg zu seiner Lösung angegeben.

Er geht zu diesem Zweck aus von dem Ausdruck für den Krümmungsradius der ersten Polarkurve

$$\varrho_0 = \left| \varrho + \frac{d^2\varrho}{d\sigma^2} \right| .$$

Durch Wiederholung des Verfahrens bildet er hieraus den Wert für den Krümmungsradius der zweiten Polarkurve. Für diesen wird

$$\varrho_{00} = \left| \varrho_0 + \frac{d}{d\sigma_0}\left(\frac{d\varrho_0}{d\sigma_0}\right) \right| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Zwischen dem Kontingenz- und Schmiegungswinkel der Ursprungs- und ersten Polarkurve bestehen dabei folgende Relationen[2]):

$$d\sigma_0 = \pm d\tau ; \qquad d\tau_0 = |d\sigma| .$$

Zur Vereinfachung der Rechnung führt Aoust nun eine Funktion

$$\varphi = \frac{d\tau}{d\sigma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ein, welche das Abhängigkeitsverhältnis zwischen Krümmung und Torsion ausdrückt. Er bemerkt dabei, daß das Problem solange unbestimmt bleibt, als nicht für φ eine bestimmte Funktion, etwa $\varphi = \text{const.}$, vorgegeben wird.

Mit Hilfe von (2) liefert (1)

$$\varrho_{00} = \left| \varrho_0 + \frac{\varphi d}{\varphi d\sigma}\left(\frac{d\varrho_0}{\varphi d\sigma}\right) \right| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Liegen die beiden Kurven der Bedingung gemäß auf einer Zylinderfläche, so sind sie kongruent und haben denselben Krümmungsradius. Als Ausgangsgleichung erhält man also die Relation

$$\varrho = \varrho_{00} .$$

Setzt man hierin den aus (3) fließenden Wert ein, so folgt nach einigen Umformungen ein Differentialausdruck vierter Ordnung:

---

1) M. l'abbé Aoust, Bulletin d. l. société. math., VII (1879), S. 143—159.
2) Schell-Salkowski, a. a. O., S. 55.

$$\frac{d^4\varrho}{d\sigma^4} - \frac{d\varphi}{d\sigma}\cdot\frac{1}{\varphi}\cdot\frac{d^3\varrho}{d\sigma^3} + (1+\varphi^2)\frac{d^2\varrho}{d\sigma^2} - \frac{d\varphi}{d\sigma}\cdot\frac{1}{\varphi}\cdot\frac{d\varrho}{d\sigma} = 0 \quad . \quad . \quad (4)$$

Durch Einführung der Größe h, welche den Abstand des Krümmungsmittelpunktes vom Mittelpunkt der zugehörigen Schmiegungskugel definiert und mit dem Krümmungsradius durch die Relation[1])

$$h = \frac{d\varrho}{d\sigma}$$

in Verbindung steht, reduziert sich (4) auf eine lineare Differentialgleichung dritter Ordnung:

$$\frac{d^3h}{d\sigma^3} - \frac{d\varphi}{d\sigma}\cdot\frac{1}{\varphi}\cdot\frac{d^2h}{d\sigma^2} + (1+\varphi^2)\frac{dh}{d\sigma} - \frac{d\varphi}{d\sigma}\cdot\frac{1}{\varphi}\cdot h = 0\,.$$

Durch eine Reihe von Substitutionen vermag Aoust diese Gleichung noch auf eine etwas einfachere zurückzuführen. Es gelingt ihm aber nicht, diese allgemein zu lösen; und selbst in dem einfachsten der speziellen Fälle, für die A.-Schraubenlinien, kommt er keineswegs zu einem einfachen Ergebnis. Aus diesem Grunde bemerkt er auch in der Einleitung zu seiner Untersuchung:

> „cette question est, dans sa généralité, au dessus des forces d'analyse, à cause des intégrations qui ne peuvent s'effectuer, mais elle mérite l'attention des géometres à cause des simplifications dont elle est susceptible et des faits qui sont dévoilés par l'usage des coordonnées naturelles des courbes.“ — —

Diese Bemerkung veranlaßt kurze Zeit darauf den deutschen Mathematiker R. Hoppe[2]), das Problem wieder aufzunehmen. Er geht von der aus (4) herleitbaren Gleichung

$$\frac{d^4\varrho}{d\sigma^4} + \left(1 + \frac{d\tau^2}{d\sigma^2}\right)\frac{d^2\varrho}{d\sigma^2} - \frac{d\sigma}{d\tau}\cdot\frac{d^2\tau}{d\sigma^2}\left(\frac{d^3\varphi}{d\sigma^3} + \frac{d\varrho}{d\sigma}\right) = 0 \quad . \quad (5)$$

aus und gelangt unter Benutzung der Richtungskosinus des die Kurve begleitenden Dreikants zu neuen Ergebnissen.

Sind nämlich α, β, γ; l, m, n; λ, μ, ν die Richtungskosinus der Tangente, Haupt- und Binormale, so kommt man zu einer partikulären Lösung der Gleichung (5), wenn man

$$h = \frac{d\varrho}{d\sigma} = \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

setzt, eine Beziehung, die schon von Aoust erkannt, aber seltsamerweise nicht zur Lösung benutzt wurde.

---

1) Vgl. etwa Schell-Salkowski, a. a. O., S. 53.

2) R. Hoppe, Archiv d. Math. u. Phys. (1), 66 (1881), S. 386—396.

Unter Benutzung der Formeln von Frenet-Serret folgt durch wiederholte Differentiation aus (6)

$$\frac{d^2\varrho}{d\sigma^2} = \frac{d\lambda}{d\sigma} = l,$$

$$\frac{d^3\varrho}{d\sigma^3} = \frac{dl}{d\sigma} = a\frac{d\tau}{d\sigma} - \lambda,$$

$$\frac{d^4\varrho}{d\sigma^4} = l\left(1 + \frac{d\tau^2}{d\sigma^2}\right) + a\frac{d^2\tau}{d\sigma^2}.$$

Da diese Werte die Differentialgleichung (5) identisch erfüllen, ist

$$h = \lambda$$

eine partikuläre Lösung derselben. Daneben wird diese Gleichung auch noch durch die Werte

$$h = \mu \quad \text{und} \quad h = \nu$$

erfüllt. Das vollständige Integral derselben hat also die folgende Gestalt:

$$\frac{d\varrho}{d\sigma} = a\lambda + b\mu + c\nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

wobei a, b und c willkürliche Konstanten sind.

Aus (7) folgt für den Krümmungsradius

$$\varrho = \int (a\lambda + b\mu + c\nu)\, d\sigma$$

und daraus für das Bogenelement der gesuchten A.-Kurve

$$ds = [A + \int (a\lambda + b\mu + c\nu)\, d\sigma]\, d\tau.$$

Hoppe führt an dieser Stelle zur Vereinfachung eine neue Funktion

$$p = A + \int (a\lambda + b\mu + c\nu)\, d\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

ein. Damit ergibt sich für die Bogenlänge

$$s = \int p\, d\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

und die kartesischen Koordinaten sind zu bestimmen aus

$$x = \int \alpha p\, d\tau; \qquad y = \int \beta p\, d\tau; \qquad z = \int \gamma p\, d\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Auch hier ist die Lösung wieder solange unbestimmt, als nicht über die Eigenschaften der Kurve eine zweite Beziehung bekannt ist. Den einfachsten der hier möglichen Fälle bilden die A.-Schraubenlinien.

Da man nun jeder Schraubenlinie eine solche gleicher Steigung auf dem Kreiszylinder zuordnen kann, so liefern (8) bis (10) die für A.-Schraubenlinien charakteristischen Ausdrücke, sobald man dort die Richtungskosinus einer Kreiszylinderhelix einführt.

Für eine gewöhnliche Schraubenlinie ist

$$x = \cos t; \qquad y = \sin t; \qquad z = t \operatorname{ctg} \varphi.$$

Hierin ist t der Polarwinkel des Grundkreises, während φ der konstante Steigungswinkel ist. Durch Differentiation erhält man unter

Anwendung der Formeln von Frenet-Serret folgende Richtungskosinus der Schraubenlinie auf dem Kreiszylinder:

$$\alpha = -\sin t \sin\varphi; \quad l = -\cos t; \quad \lambda = \sin t \cos\varphi;$$
$$\beta = \cos t \sin\varphi; \quad m = -\sin t; \quad \mu = -\cos t \cos\varphi;$$
$$\gamma = \cos\varphi; \quad n = 0; \quad \nu = \sin\varphi.$$

Für den Kontingenz- und Schmiegungswinkel wird

$$d\tau = dt \cdot \sin\varphi; \quad d\sigma = dt \cdot \cos\varphi.$$

Die in (8) eingeführte Funktion p erhält somit den folgenden Wert:

$$p = A + f[a \sin t \cos\varphi - b \cos t \cos\varphi + c \sin\varphi]\, dt \cos\varphi$$

oder nach Ausführung der Integration:

$$p = A - \cos^2\varphi\,(a \cos t + b \sin t) + ct \sin\varphi \cos\varphi.$$

Für die Bogenlänge der A.-Schraubenlinie findet man aus (9)

$$s = At \sin\varphi \cdot \cos^2\varphi \cdot \sin\varphi\,(a \sin t + b \cos t) + \frac{c}{2} t^2 \sin^2\varphi \cos\varphi + c_1 \quad (11)$$

Beachtet man nun, daß im Fall der Kreiszylinderhelix

$$t = \frac{\sigma}{\cos\varphi} = k\sigma,$$

so folgt aus (11), da für $s = 0$ auch $t = 0$ ist, mit etwas anderer Konstantenbezeichnung:

$$s = A\sigma + B \sin k\sigma + C \cos k\sigma + D\sigma^2.$$

Für die Koordinaten der A.-Schraubenlinie erhält man entsprechende Werte durch Ausführung der Quadraturen in (10). Es wird

$$x = \sin\varphi\Big[A \cos k\sigma - \frac{B}{2} \sin^2 k\sigma + \frac{C}{2}(k\sigma - \sin k\sigma \cos k\sigma) + D_1 (k\sigma \cos k\sigma - \sin k\sigma)\Big],$$

$$y = \sin\varphi\Big[A \sin k\sigma - \frac{B}{2}(k\sigma + \sin k\sigma \cos k\sigma) - \frac{C}{2} \sin^2 k\sigma + D_1 (k\sigma \sin k\sigma + \cos k\sigma)\Big],$$

$$z = \cos\varphi\,[A\sigma + B \sin k\sigma + C \cos k\sigma + D\sigma^2].$$

Hierbei sind A, B und C die gleichen Konstanten wie in (11).

Auf viel eleganterem Wege sind die von Aoust und R. Hoppe mit Hilfe analytischer Methoden gefundenen Ergebnisse durch rein geometrische Betrachtungen zu erhalten. Auf diese wurde zuerst von E. Salkowski hingewiesen.[1])

Es seien in Fig. 1 P_1, P_2, P_3 ... Punkte einer A.-Kurve (P). Mit K_1, K_2, K_3 ... mögen die entsprechenden Schmiegungskugelmittelpunkte bezeichnet werden. Sie erfüllen eine Kurve (K), welche

1) E. Salkowski, Sitzungsber. d. Berl. Math. Ges. (6) 1907, S. 54—59.

die erste Polarkurve zu (P) ist. Die zu den einzelnen Punkten von (K) gehörigen Schmiegungskugeln mögen die Mittelpunkte $L_1, L_2, L_3 \ldots$ besitzen. Durch diese wird die Polarkurve zu (K), mithin dle zweite Polarkurve zu (P) bestimmt.

Sind nun der Voraussetzung gemäß die beiden Kurven (P) und (L) einander kongruent, so müssen die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte $P_1 L_1$, $P_2 L_2$, $P_3 L_3 \ldots$ eine konstante Länge m haben und einer festen Richtung im Raum dauernd parallel bleiben.

Es seien $P_1 T$, $P_1 H$ und $P_1 B$ die Tangente bzw. Haupt- und Binormale der Kurve (P) im Punkte P_1. Zieht man nun $K_1 M_1 \parallel B P_1$

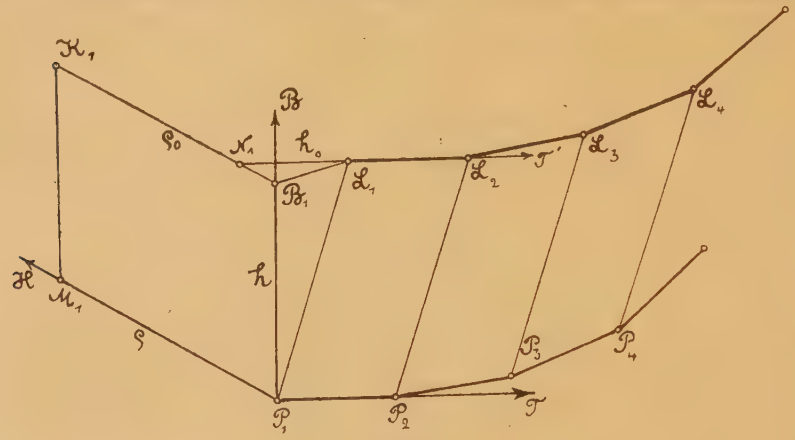

Fig. 1.

und $K_1 B_1 \parallel H P_1$, so ist M_1 der Krümmungsmittelpunkt für P_1 und demzufolge $P_1 M_1 = \varrho$; $P_1 B_1 = h$. Die Tangente an (L) in L_1 sei $L_1 T'$. Ihre Verlängerung trifft $B_1 K_1$ im Mittelpunkt N des zu L_1 gehörigen Krümmungskreises. Daraus folgt für die Bestimmungsstücke der ersten Polarkurve

$$K_1 N_1 = \varrho_0 \quad \text{und} \quad L_1 N_1 = h_0.$$

Man fälle nunmehr von L_1 aus auf die Binormale der zugeordneten Kurve (P) das Lot, es trifft die erstere im Punkte B_1, daraus folgt: $P_1 B_1 = h$.

Aus dem bei B_1 rechtwinkligem Dreieck $P_1 B_1 L_1$ folgt mithin

$$\cos(m, h) = \frac{h}{m} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

Ist nun anderseits die feste Richtung m bestimmt durch die konstante Richtungskosinus a, b, c, so erhält man aus (12) als notwendige und hinreichende Bedingung für A.-Kurven die Relation

$$\frac{d\varrho}{d\sigma} = m(a\lambda + b\mu + c\nu) \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

eine Gleichung, die völlig mit dem in (7) gegebenen allgemeinen Integral der Differentialgleichung (5) übereinstimmt.

Um nun zu A.-Schraubenlinien zu gelangen, setze man in (13) die schon oben benutzten Bestimmungsstücke einer Kreiszylinderhelix ein. Es wird

$$\varrho = \frac{m}{\sin\varphi\cos\varphi}[b\sin k\sigma - a\cos k\sigma] + B\sigma + C;$$

setzt man hierin zu Abkürzung

$$A = \frac{m}{\sin\varphi\cos\varphi}\sqrt{a^2+b^2} \quad \text{und} \quad \frac{a}{b} = \operatorname{tg} k\sigma_1,$$

so folgt

$$\varrho = A\sin k(\sigma - \sigma_1) + B\sigma + C$$

oder nach geeigneter Wahl des Koordinatenanfangspunktes

$$\varrho = A\sin k\sigma + B\sigma + C \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

Die explizite Darstellung der Koordinaten einer A.-Schraubenlinie ergibt sich aus (14) am einfachsten mit Hilfe der parallelen Zuordnung einer gewöhnlichen Schraubenlinie.

Wenn allgemein x', y', z' und ϱ' bzw. x, y, z und ϱ die Bestimmungsstücke zweier paralleler Kurven sind, so gilt

$$x = \int\frac{\varrho}{\varrho'}dx'; \qquad y = \int\frac{\varrho}{\varrho'}dy'; \qquad z = \int\frac{\varrho}{\varrho'}dz'.$$

Diese Gleichungen gelten für A.-Schraubenlinien, sobald man für ϱ den oben gefundenen Wert (14) und für x', y', z' bzw. ϱ' die Bestimmungsstücke einer gewöhnlichen Schraubenlinie einführt. Man erhält dabei:

$$x = -\frac{k}{\sin^2\varphi}\int[A\sin k\sigma + B\sigma + C]\sin k\sigma\, d\sigma$$

$$y = \frac{k}{\sin^2\varphi}\int[A\sin k\sigma + B\sigma + C]\sin k\sigma\, d\sigma$$

$$z = \frac{k\operatorname{ctg}\varphi}{\sin^2\varphi}\int[A\sin k\sigma + B\sigma + C]\, d\sigma.$$

Hieraus ergibt sich durch Integration mit etwas anderer Konstantenbezeichnung

$$x = A_1(\sin 2k\sigma - 2k\sigma) - (B_1 k\sigma + C)\cos k\sigma - B_1\sin k\sigma$$
$$y = A_1(\cos 2k\sigma - 2k\sigma) + (B_1 k\sigma + C)\sin k\sigma + B_1\cos k\sigma$$
$$z = A_2\cos k\sigma + B_2\sigma^2 + C_2\sigma.$$

Mehr ist im wesentlichen über A.-Kurven bisher nicht veröffentlicht.

In den folgenden Abschnitten soll nun die von E. Salkowski angegebene geometrische Betrachtung des Problems etwas weiter ausgedehnt werden, um dann neben den A.-Schraubenlinien auch andere A.-Kurven in den Kreis der Betrachtung zu ziehen.

II.

Allgemeine Aoustsche Kurven.

1. Die sphärische Abbildung der A.-Kurven. Es seien in Fig. 2 P_1, P_2, P_3 . . . die Punkte der A.-Ausgangskurve (P); L_1, L_2, L_3 . . . die entsprechenden Punkte der zweiten Polarkurve (L).

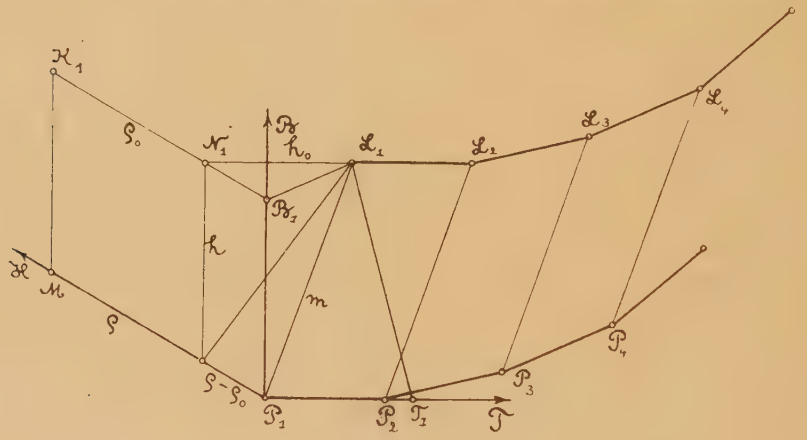

Fig. 2.

K_1, K_2, K_3 . . . sind die Mittelpunkte der zugehörigen Schmiegungskugeln, und $P_1 T$; $P_1 B$; $P_1 H$ die Kanten des die Kurve in P_1 begleitenden Dreikants. $P_1 L_1$ ist die konstante Entfernung der zugeordneten A.-Kurven und die Erzeugende des A.-Zylinders.

Fällt man nunmehr von L_1 aus auf die Geraden des Dreikants die Lote $L_1 T_1$, $L_1 H_1$, $L_1 B_1$, so folgt neben der schon oben in Fig. 1 erkannten Beziehung

$$P_1 B_1 = h$$

mittels elementargeometrischer Sätze für die anderen Abschnitte

$$P_1 T_1 = h_0, \qquad P_1 H_1 = \varrho - \varrho_0.$$

Hierbei gelten, wie oben, die Werte mit dem Index $_0$ für die erste Polarkurve.

Bildet man nun die A.-Kurve sphärisch ab, so wird die feste Richtung $P_1 L_1$ auf der Bildkugel durch einen Punkt E mit konstanten Koordinaten a, b, c dargestellt. Die von diesem auf die Strahlen OT, OH, OB gefällten Lote bestimmen drei neue Kurven (B_1), (T_1) und (H_1). Es sind dies ebenfalls sphärische Kurven, denn sie liegen sämtlich auf einer über OE als Durchmesser beschriebenen kleinen Kugel.

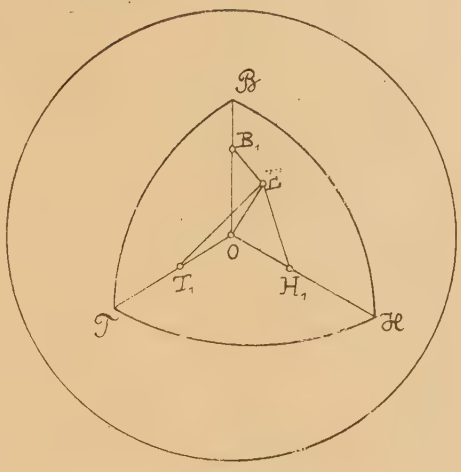

Fig. 3.

Die auf diese Weise entstehenden Kurven sollen zunächst unabhängig von der A.-Bedingung etwas näher betrachtet werden.

2. Sphärische Fußpunktkurven. Unabhängig von der A.-Bedingung würde es sich bei den oben charakterisierten Gebilden also um den geometrischen Ort der Fußpunkte derjenigen Lote handeln, die von einem festen Punkt der Kugel auf den Radiusvektor einer sphärischen Kurve gefällt werden. In gewisser Analogie zu den ebenen Kurven mögen die auf diese Weise entstehenden sphärischen Kurven kurz als sphärische Fußpunktkurven bezeichnet werden.

Unter der Fußpunktkurve eines ebenen Gebildes versteht man bekanntlich den geometrischen Ort der Fußpunkte der von einem festen Punkt A auf die Kurventangenten gefällten Lote. Da die Ebene eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit von ∞^2 Punkten darstellt, von denen jeder zum Erzeugungszentrum einer Fußpunktkurve genommen werden kann, existieren zu jeder ebenen Kurve ∞^2 im allgemeinen voneinander verschiedene Fußpunktkurven.

Überträgt man diesen Gedanken auf die Kurven doppelter Krümmung, so ist eine ungleich größere Mannigfaltigkeit zu erwarten. Der feste Ausgangspunkt der Lote kann ∞^3 verschiedene Lagen einnehmen und erzeugt mithin für jede Raumkurve ∞^3 Fußpunktkurven. Überdies kann man im dreidimensionalen Raum auch

noch die geometrischen Örter der Fußpunkte der auf die Haupt- und Binormale gefällten Lote in den Kreis der Betrachtung ziehen. Man erhält somit neben ∞^3-Fußpunktkurven der Tangente ebensoviele der Haupt- und Binormale.

Es sollen nun hier die Fußpunktkurven der Raumkurven nicht direkt betrachtet werden, sondern die Kurven, welche entstehen, wenn man den festen Punkt auf der Oberfläche der Bildkugel annimmt und von ihm aus die Lote auf die Tangenten-, Hauptnormalen- und Binormalen-Richtung fällt. Da der feste Punkt E auf der Kugeloberfläche ∞^2 verschiedene Lagen einnehmen kann, besitzt jede Raumkurve ∞^2 im allgemeinen verschiedene sphärische Tangenten-, Hauptnormalen- und Binormalen-Fußpunktkurven.

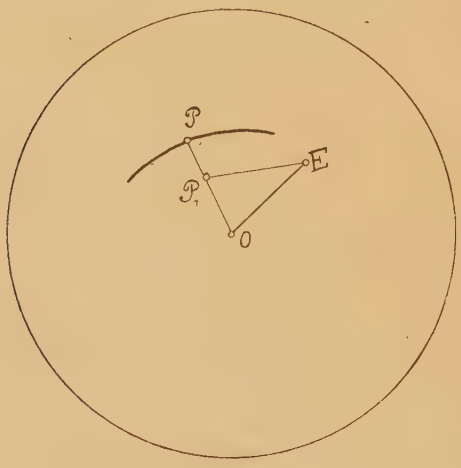

Fig. 4.

Die im vorstehenden definierten Kurven ergeben sich als Schnitt eines Kegelmantels mit der über OE als Durchmesser beschriebenen kleinen Kugel (Fig. 4). Die Mittelpunktkoordinaten der letzteren sind bestimmt durch

$$\xi_0 = \frac{a}{2}, \quad \eta_0 = \frac{b}{2}, \quad \zeta_0 = \frac{c}{2}.$$

Wird zur Vereinfachung der Radius der großen Kugel der Einheit gleich gesetzt, so lautet die Gleichung der kleinen Kugel

$$\left(\xi - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\zeta - \frac{c}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Sind nun anderseits x, $\bar{y}$, $\bar{z}$ die Koordinaten des Punktes P, so hat der von O aus nach P führende Strahl die Gleichungen:

$$\eta = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}\xi, \quad \zeta = \frac{\bar{z}}{\bar{x}}\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Aus der Verbindung von (1) und (2) ergeben sich die Koordinaten der gesuchten sphärischen Fußpunktkurve (P_1). Setzt man dabei zur Abkürzung

$$a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z} = \Sigma a\bar{x},$$

so erhält man

$$x = \bar{x}\Sigma a\bar{x}, \quad y = \bar{y}\Sigma a\bar{x}, \quad z = \bar{z}\Sigma a\bar{x} \quad . \quad . \quad (3)$$

Die einzelnen Punkte von (P_1) haben vom Ursprung die Entfernung

$$w = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2}$$

oder unter Berücksichtigung von (3)

$$w = \Sigma a \bar{x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Handelt es sich bei der zu betrachtenden sphärischen Kurve im besonderen um die Indikatrix der Tangenten, Haupt- und Binormalen einer abgebildeten Raumkurve, so wird

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \lambda, & \bar{x}_2 &= \alpha, & \bar{x}_3 &= l \\ \bar{y}_1 &= \mu, & \bar{y}_2 &= \beta, & \bar{y}_3 &= m \\ \bar{z}_1 &= \nu, & \bar{z}_2 &= \gamma, & \bar{z}_3 &= n. \end{aligned}$$

Für die Koordinaten und Vektorradien der zugehörigen Binormalen-, Tangenten- und Hauptnormalen-Fußpunktkurve erhält man daraus unter Benutzung von (3) und (4) folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \lambda \Sigma a\lambda; & y_1 &= \mu \Sigma a\lambda; & z_1 &= \nu \Sigma a\lambda \\ x_2 &= \alpha \Sigma a\alpha; & y_2 &= \beta \Sigma a\alpha; & z_2 &= \gamma \Sigma a\alpha \\ x_3 &= l \Sigma al; & y_3 &= m \Sigma al; & z_3 &= n \Sigma al \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (5)$$

und

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= a\lambda + b\mu + c\nu \\ w_2 &= a\alpha + b\beta + c\gamma \\ w_3 &= al + bm + cn \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Aus (5) folgt nach leichten Umformungen:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= a \\ y_1 + y_2 + y_3 &= b \\ z_1 + z_2 + z_3 &= c, \end{aligned}$$

was man auch folgendermaßen zum Ausdruck bringen kann:

Die einem bestimmten Punkt der abgebildeten Raumkurve entsprechenden Punkte der Tangenten-, Hauptnormalen- und Binormalen-Fußpunktkurve bestimmen immer denselben Schwerpunkt.

Die Koordinaten desselben sind

$$\xi_1 = \frac{a}{3}; \qquad \eta_1 = \frac{b}{3}; \qquad \zeta_1 = \frac{c}{3},$$

er liegt mithin auf OE, diese Strecke im Verhältnis $1 : 2$ teilend. Wenn daher von den Punkten T_1, H_1, B_1 zwei gegeben sind, ist der dritte eindeutig bestimmt, in Übereinstimmung mit der Tatsache, daß von den Kanten des Fundamentaltrieders nur zwei willkürlich bestimmbar sind.

Aus (6) folgt als weitere Gleichung

$$w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

eine Relation, die weiter unten eine einfache analytische Darstellung der A.-Bedingung zuläßt.

Aus den Formeln von Frenet-Serret ergibt sich ganz allgemein $d\Sigma a\alpha = d\tau \Sigma al, \quad d\Sigma a\lambda = d\sigma \Sigma al \quad . \quad . \quad . \quad (8)$

in Verbindung mit (6) liefert dies

$$\frac{dw_1}{dw_2} = \frac{d\tau}{d\sigma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Die Differentiale der Vektorradien von Binormalen- und Tangenten-Fußpunktkurve verhalten sich wie die Krümmungswinkel der Ausgangskurve.

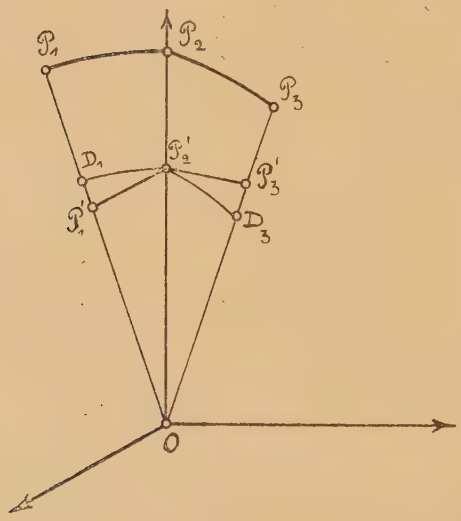

Fig. 5.

Das Bogenelement der sphärischen Fußpunktkurven findet man durch folgende Betrachtung:

Es seien in Fig. 5 P_1, P_2, P_3 drei konsekutive Punkte einer sphärischen Kurve. P_1', P_2', P_3' mögen die entsprechenden Punkte der zugehörigen Fußpunktkurve sein. Durch P_2' werde auf dem von dem Radiusvektor beschriebenen Kegelmantel eine zu (P) parallele Kurve (D) gezogen. Bezeichnet man die Bogenelemente von (P) und (P_1) mit ds' bzw. ds_1, so folgt aus dem infinitesimalen Dreieck $P_1' D_1 P_2'$

$$ds_1 = \sqrt{dw^2 + w^2 ds'^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

wobei w der oben berechnete Radiusvektor der sphärischen Fußpunktskurve ist.

Für die Bildkurven eines Kurven-Dreikants nimmt ds' der Reihe nach die Werte $d\tau$, $d\sigma$, dk an, während w gemäß (6), je nachdem ob es sich um die Kurve (B_1), (T_1) oder (H_1) handelt, gleich $\Sigma a\lambda$, $\Sigma a\alpha$ oder Σal zu setzen ist. Für die Bogenelemente von (B_1), (T_1) und (H_1) ergibt sich damit

$$\left.\begin{aligned} ds_1 &= \sqrt{(d\Sigma a\lambda)^2 + d\tau^2(\Sigma a\lambda)^2} \\ ds_2 &= \sqrt{(d\Sigma a\alpha)^2 + d\sigma^2(\Sigma a\alpha)^2} \\ ds_3 &= \sqrt{(d\Sigma a\, l)^2 + ak^2(\Sigma a\, l)^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (11)$$

nun folgt aus (8)

$$d\Sigma a\lambda = d\sigma\, w_3\,; \qquad d\Sigma a\alpha = d\tau\, w_3\,.$$

Beachtet man ferner noch, daß nach (7)

$$w_1^2 + w_3^2 = 1 - w_2^2\,; \qquad w_2^2 + w_3^2 = 1 - w_1^2$$

ist, so kann man für (11) auch schreiben

$$\left.\begin{aligned} ds_1 &= d\sigma\sqrt{1-(\Sigma a\alpha)^2} \\ ds_2 &= d\tau\sqrt{1-(\Sigma a\lambda)^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (12)$$

Die Richtungen der an die sphärischen Fußpunktkurven gelegten Tangenten lassen sich aus (5) und (10) leicht durch formale Rechnung finden. Es kommt aus (3) unter Benutzung von (4)

$$\begin{aligned} dx &= \bar{x}\,dw + w\,d\bar{x} \\ dy &= \bar{y}\,dw + w\,d\bar{y} \\ dz &= \bar{z}\,dw + w\,d\bar{z}. \end{aligned}$$

Die gesuchten Richtungskosinus erhalten damit die Form

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{x\,dw + w\,dx}{\sqrt{dw^2 + w^2 ds^2}} \\ \beta_1 &= \frac{\bar{y}\,dw + w\,d\bar{y}}{\sqrt{dw^2 + w^2 ds^2}} \\ \gamma_1 &= \frac{\bar{z}\,dw + w\,d\bar{z}}{\sqrt{dw^2 + w^2 ds^2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (13)$$

Handelt es sich im besonderen um die Binormalen-Fußpunktkurve, so wird

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\alpha\, d\Sigma a\lambda}{d\sigma\sqrt{1-(\Sigma a\alpha)^2}} + \frac{\Sigma a\lambda \cdot d\lambda}{d\sigma\sqrt{1-(\Sigma a\alpha)^2}} \\ \beta_1 &= \frac{\beta\, d\Sigma a\lambda}{d\sigma\sqrt{1-(\Sigma a\alpha)^2}} + \frac{\Sigma a\lambda \cdot d\mu}{d\sigma\sqrt{1-(\Sigma a\alpha)^2}} \\ \gamma_1 &= \frac{\gamma\, d\Sigma a\lambda}{d\sigma\sqrt{1-(\Sigma a\alpha)^2}} + \frac{\Sigma a\lambda \cdot d\nu}{d\sigma\sqrt{1-(\Sigma a\alpha)^2}}. \end{aligned}$$

Macht man nun Gebrauch von der schon oben angewandtem Umformung

$$\frac{d\Sigma a\lambda}{d\sigma} = \Sigma a l$$

und beachtet ferner, daß in jedem Fall

$$\frac{d\lambda}{d\sigma} = l\,; \qquad \frac{d\mu}{d\sigma} = m\,; \qquad \frac{d\nu}{d\sigma} = n$$

ist, so folgt

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 &= \lambda \frac{\Sigma al}{\sqrt{1-(\Sigma a\alpha)^2}} + l \frac{\Sigma a\lambda}{\sqrt{1-(\Sigma a\alpha)^2}}\\ \beta_1 &= \mu \frac{\Sigma al}{\sqrt{1-(\Sigma a\alpha)^2}} + m \frac{\Sigma a\lambda}{\sqrt{1-(\Sigma a\alpha)^2}}\\ \gamma_1 &= \nu \frac{\Sigma al}{\sqrt{1-(\Sigma a\alpha)^2}} + n \frac{\Sigma a\lambda}{\sqrt{1-(\Sigma a\alpha)^2}}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Zur Abkürzung sei jetzt ein Winkel t eingeführt, dieser werde durch die Gleichungen

$$\sin t = \frac{\Sigma al}{\sqrt{1-(\Sigma a\alpha)^2}}; \quad \cos t = \frac{\Sigma a\lambda}{\sqrt{1-(\Sigma a\alpha)^2}}; \quad \operatorname{tg} t = \frac{\Sigma al}{\Sigma a\lambda} \quad (15)$$

bestimmt. Mit seiner Hilfe nehmen die Ausdrücke in (14) folgende Werte an:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 &= \lambda \sin t + l \cos t\\ \beta_1 &= \mu \sin t + m \cos t\\ \gamma_1 &= \nu \sin t + n \cos t\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Setzt man in entsprechender Weise

$$\sin t_0 = \frac{\Sigma al}{\sqrt{1-(\Sigma a\lambda)^2}}; \quad \cos t_0 = \frac{\Sigma a\alpha}{\sqrt{1-(\Sigma a\lambda)^2}}; \quad \operatorname{tg} t_0 = \frac{\Sigma al}{\Sigma a\alpha},$$

so ergibt sich für die Richtungen der an die Kurve (T_1) gelegten Tangenten

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \alpha \sin t_0 + l \cos t_0\\ \beta_2 &= \beta \sin t_0 + m \cos t_0\\ \gamma_2 &= \gamma \sin t_0 + n \cos t_0.\end{aligned}$$

Es wird sich weiter unten zeigen, daß die Winkel t und t_0 leicht darstellbar sind. Es sind die Winkel, die von den Tangenten der Binormalen und Tangenten-Fußpunktkurve und der Binormale bzw. Tangente der Ausgangskurve eingeschlossen werden.

Die Krümmungswinkel der sphärischen Fußpunktkurven lassen sich für allgemeine Kurven nicht durch einfache Ausdrücke darstellen. Der Weg zu ihrer Berechnung ist jedoch leicht erkennbar. Ausgehend von (13) berechnet man mit Hilfe der Formeln von Frenet-Serret zunächst den Kontingenzwinkel. Daraus ergibt sich sodann der Krümmungsradius. Dieser folgt aus

$$\varrho_1 = \frac{ds_1}{d\tau_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Da nun die Kurve (P_1) auf einer Kugel mit dem Radius $R = \frac{1}{2}$ liegt, erhält man für sie aus der für jede sphärische Kurve geltenden Relation

$$\varrho = R \sin \sigma$$

einen zweiten Ausdruck für den Radius der Krümmung

$$\varrho_1 = \tfrac{1}{2} \sin \sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Aus der Vereinigung von (17) und (18) folgt sodann der Torsionswinkel von (P_1) als Funktion von s_1 oder w_1, womit die gesuchte Fußpunktkurve völlig bestimmt ist.

3. Die Krümmungswinkel der Binormalen- und Tangenten-Fußpunktkurve. Beschränkt man sich auf die sphärische Fußpunktkurve des Binormalen- und Tangentenbildes, so sind die gesuchten Krümmungswinkel mit Hilfe der sphärischen Abbildung verhältnismäßig leicht zugänglich. Es zeigt sich nämlich, daß das Tangentenbild von (B_1) und (T_1) in völliger Analogie zu den Tangentenbildern der Krümmungmittelpunktskurve von Ausgangs- und erster Polarkurve steht. Man kommt deshalb mit der dort angewandten Methode[1]) in einfacher Weise auch hier zum Ziel.

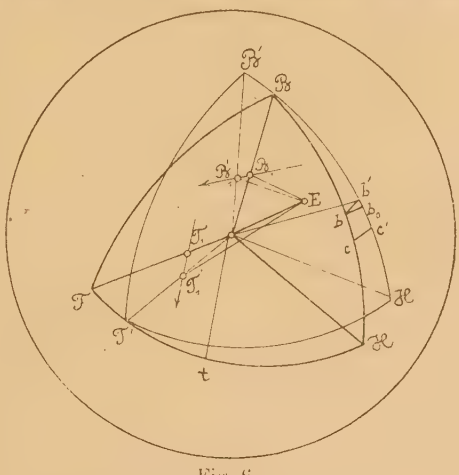

Fig. 6.

Aus Fig. 6 geht zunächst hervor, daß die Tangenten von (B_1) und (T_1), welche durch je zwei konsekutive Punkte B_1, B_1' und T_1, T_1' bestimmt sind, in den Ebenen BH und TH liegen. Ihre Tangentenbilder liegen also auf den größten Kreisen BH und TH.

Da man das Tangentenbild jeder Raumkurve als das Binormalenbild ihrer ersten Polarkurve auffassen kann, ergibt sich ohne weiteres, daß die Kurve (T_1) in demselben Verhältnis zu der ersten Polarkurve steht wie (B_1) zur Ausgangskurve. Aus diesem Grunde soll die weitere Untersuchung zunächst nur auf die Kurve (B_1) beschränkt werden. Die entsprechenden Formeln für die Tangentenfußpunktkurve ergeben sich daraus durch Analogieschluß.

Es seien b und b' die sphärischen Bilder benachbarter Tangenten von (B_1). Sie liegen mit den Tangentenbildern der Krümmungsmittelpunktkurve[2]) auf den größten Kreisen, die durch BH und

1) Schell-Salkowski a. a. O. S. 92 ff. 2) Ebenda S. 93.

$B'H'$ gelegt sind. Die letzteren mögen mit c und c' bezeichnet werden. r ist das Bild der rektifizierenden Geraden.

Elementaren Formeln zufolge ist

$$\cos(Bb) = \lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 + \nu\gamma_1,$$

setzt man hierin die in (13) gewonnenen Werte ein, so wird

$$\cos(Bb) = \cos t$$

oder

$$Bb = t.$$

In entsprechender Weise gilt für (T_1)

$$Tb_0 = t_0.$$

Zunächst kann man nun den Winkel berechnen, den die Tangente von (B_1) mit der an die Krümmungsmittelpunktkurve gelegten Tangente einschließt.

Es ist $Bc = \pi - \delta$ oder $Bc = 2\pi - \delta$,

je nachdem, ob es sich um eine Kurve positiver oder negativer Torsion handelt. Hierin ist δ der Winkel, den der Radius der Schmiegungskugel mit der Schmiegungsebene einschließt. Er ist in jedem Fall bestimmt durch die Gleichungen[1])

$$\sin\delta = \frac{h}{R}; \quad \cos\delta = \frac{\varrho}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Der gesuchte Winkel wird ausgedrückt durch den Bogen

$$cb = Bc - Bb.$$

Man erhält mithin

$$\psi = \pi - (\delta + t) \quad \text{bzw.} \quad \psi = 2\pi - (\delta + t)$$

oder

$$\sin\psi = \pm\sin(\delta + t).$$

Unter Benutzung von (15) und (19) folgt daraus

$$\sin\psi = \pm\frac{h\Sigma a\lambda + \varrho\Sigma al}{R\sqrt{1-(\Sigma a\alpha)^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

In analoger Weise gilt für den Winkel, der zwischen der Tangente von (T_1) und derjenigen der Krümmungsmittelpunkte der ersten Polarkurve liegt

$$\sin\psi_0 = \pm\frac{h_0\Sigma a\alpha + \varrho_0\Sigma al}{R_0\sqrt{1-(\Sigma a\lambda)^2}}.$$

Von Interesse ist schließlich auch noch der Winkel, der zwischen der rektifizierenden Geraden und der Tangente von (B_1) liegt.

Das Bild der rektifizierenden Geraden ist bestimmt als gemeinsame sphärische Evolute von (B) und (T). Wird der Winkel, der zwischen der Kurventangente und der rektifizierenden Geraden liegt,

---

1) Schell-Salkowski a. a. O. S. 54.

mit H bezeichnet, so sind die Richtungskosinus der letzteren bestimmt durch

$$\alpha' = \alpha \cos H + \lambda \sin H$$
$$\beta' = \beta \cos H + \mu \sin H$$
$$\gamma' = \gamma \cos H + \nu \sin H$$

Man erhält damit für den von r und b eingeschlossenen Winkel

$$\cos \chi = \sin H \cdot \sin t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Beachtet man nun, daß allgemein für jede Raumkurve[1])

$$\sin H = \frac{d\tau}{dk}$$

ist, so kann man für (21) auch schreiben

$$\cos \chi = \frac{d\tau \Sigma a l}{dk \sqrt{1 - (\Sigma a \lambda)^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

und für den entsprechenden Winkel der Kurve (T_1)

$$\cos \chi_0 = \frac{|d\sigma| \Sigma a l}{dk \sqrt{1 - (\Sigma a \lambda)^2}} .$$

Der Kontingenzwinkel der Kurve (B_1) liegt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Tangenten b und b'. Er läßt sich aus dem infinitesimalen sphärischen Dreieck $b' b_0 b$, wo $b b_0$ senkrecht zu BH' gezogen ist, bestimmen (Fig. 6).

Der Bogen $b b_0$ gehört zu einem Kreise mit dem Radius

$$\sin Bb = \sin t.$$

Da nun der Winkel zwischen $B'H'$ und BH gleich dem Kontingenzwinkel der Ausgangskurve ist, folgt

$$b b_0 = d\tau \sin t.$$

Andererseits ist $B'b' = t + dt$

und daraus ergibt sich $b_0 b' = Bb' - Bb = d\sigma + dt.$

Der gesuchte Krümmungswinkel von (B_1) bestimmt sich mithin aus

$$d\tau_1 = \sqrt{(d\sigma + dt)^2 + d\tau^2 \sin^2 t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Ein analoger Ausdruck gilt für den Kontingenzwinkel von (T_1), nämlich

$$d\tau_2 = \sqrt{(dt_0 + \varepsilon d\tau)^2 + d\sigma^2 \sin^2 t_0}.$$

Damit erhält man unter Beachtung von (12) für die zugehörigen Krümmungsradien

$$\varrho_1 = \sqrt{\frac{d\tau^2 (1 - [\Sigma a \lambda]^2)}{(d\sigma + dt)^2 + d\tau^2 \sin^2 t}}$$

$$\varrho_2 = \sqrt{\frac{d\sigma^2 (1 - [\Sigma a \alpha]^2)}{(dt_0 + \varepsilon d\tau)^2 + d\sigma^2 \sin^2 t_0}}.$$

1) Schell-Salkowski a. a. O. S. 30.

In diesen Ausdrücken ist $\varepsilon = \pm 1$,

je nachdem ob der Ausdruck $\frac{RdR}{rd\varrho} \gtrless 0$ wird.[1])

Aus dem Dreieck $bb'b_0$ kann man auch den Winkel i bestimmen, den die Schmiegungsebene von (B_1) mit der Normalebene der abgebildeten Ausgangskurve bildet. In Fig. 6 ist bb' das Bild der Schmiegungsebene von (B_1), b_0b dasjenige der Normalebene von (P). Der in Frage kommende Winkel ist also

$$i = bb'b_0.$$

Er bestimmt sich aus den Gleichungen:

$$\sin i = \frac{d\tau}{d\tau_1}\sin t; \qquad \cos i = \frac{d\sigma + dt}{d\tau_1} \quad . \quad . \quad (24)$$

Mit dem Winkel i stehen zwei andere bemerkenswerte Winkel in nahem Zusammenhang.

Die Neigung der Tangente von (P) gegen die Schmiegungsebene von (B_1) werde mit K bezeichnet. Sie wird gemessen durch den Bogen Td. Man erkennt leicht, daß K den Winkel i zu $\frac{\pi}{2}$ ergänzt. Man hat also

$$\varkappa = \frac{\pi}{2} - i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Anderseits ist die Neigung der Tangente von (B_1) gegen die Schmiegungsebene von (P) (d. i. die abgebildete Ausgangskurve) bestimmt durch den Bogen bH. Bezeichnet man diesen Winkel mit K', so wird

$$\varkappa' = \frac{\pi}{2} - t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

daraus ergibt sich in Verbindung mit (24) die Relation

$$\frac{\cos\varkappa}{\cos\varkappa'} = \frac{d\tau}{d\tau_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Entsprechendes gilt für die sphärische Tangenten-Fußpunktkurve, wofür man erhält:

$$\frac{\cos\varkappa_0}{\cos\varkappa_0'} = \frac{|d\sigma|}{d\tau_2}.$$

Die Ausgangskurve und ihre sphärische Binormalen-Fußpunktkurve sind zwei Raumkurven von der Art, daß der Kosinus der Neigung jeder von ihnen gegen die Schmiegungsebene der anderen in demselben Verhältnis stehen, wie ihre Kontingenzwinkel.

Das gleiche gilt für die Tangenten-Fußpunktkurve und erste Polarkurve.

1) Schell-Salkowsky a. a. O. S. 55.

Es läßt sich aus der sphärischen Abbildung noch eine andere ähnliche Winkelbeziehung ablesen.

Das sphärische Bild der Schmiegungsebene von (B_1), d. h. der größte Kugelkreis durch bb' (Fig. 7) schneidet das Bild der Schmiegungsebene von (P) in f. Der spitze Winkel $bfH = \vartheta$ ist dann der Neigungswinkel der beiden Ebenen. Das Dreieck fHb ist bei H rechtwinklig. Es folgt somit $\cos\vartheta = \sin(fbH)\cdot\cos(bH)$.

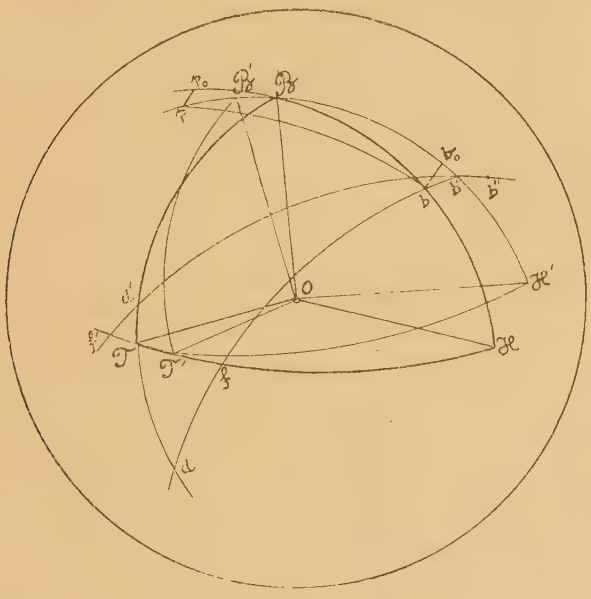

Fig. 7.

Hierin ist $bH = \frac{\pi}{2} - t$ und $fbH = i$. Damit erhält man

$$\cos\vartheta = \sin i \cdot \sin t,$$

wofür man gemäß (25) und (26) auch schreiben kann

$$\cos\vartheta = \cos\varkappa \cdot \cos\varkappa'$$

und für die Tangenten-Fußpunktkurve

$$\cos\vartheta_0 = \cos\varkappa_0 \cdot \cos\varkappa_0'.$$

Der Kosinus des Winkels, den die Schmiegungsebenen der Ursprungskurve und der Binormal-Fußpunktkurve miteinander bilden, ist gleich dem Produkt der Kosinus der Neigungen der Tangenten je einer von ihnen gegen die Schmiegungsebene der anderen.

Ein gleiches gilt für die Tangenten-Fußpunktkurve und erste Polarkurve.

Man kann auch noch den Schmiegungswinkel von (B_1) bestimmen.

Der gesuchte Winkel der zweiten Krümmung werde mit $d\sigma_1$ bezeichnet. Er liegt zwischen zwei aufeinander folgenden Schmiegungsebenen von (B_1), d. h. also zwischen den durch bb' und $b'b''$ gelegten größten Kugelkreisen. Aus Fig. 7 ergibt sich:

$$d\sigma_1 = fb'B' - f'b'B' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Nach den obenstehenden Entwickelungen ist nun

$$fbB = i, \qquad f'b'B' = i + di.$$

Ist der Pol des durch bb_0 gelegten Kreises mit p bezeichnet, so wird

$$pB = \frac{\pi}{2} - t.$$

Das Lot pp_0 ist dabei der Bogen eines Kreises mit dem Radius $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$, man erhält also:

$$pp_0 = d\tau \cos t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Da der Voraussetzung gemäß $pb = \frac{\pi}{2}$ ist, läßt sich der Bogen pp_0 auch ausdrücken durch den Winkel pbp_0. Vernachlässigt man unendlich kleine Größen höherer Ordnung, so wird

$$fb'B' = fbp = fbB - Bbp = i - pp_0 \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Durch Verbindung von (28), (29) und (30) folgt für den Schmiegungswinkel der Binormalen-Fußpunktkurve (B)

$$d\sigma_1 = -(d\tau \cos t + di) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Damit ist auch der Radius der zweiten Krümmung von (B_1) und (T_1) gegeben. Es wird

$$r_1 = \frac{d\tau\sqrt{1 - (\Sigma a\lambda)^2}}{-(d\tau \cos t + di)},$$

$$r_2 = \frac{\varepsilon d\sigma\sqrt{1 - (\Sigma a\alpha)^2}}{(-\varepsilon d\sigma \cos t_0 + di_0)}.$$

Die Binormalen- und Tangenten-Fußpunktkurve sind mit diesen Angaben völlig bestimmt. Aus der Analogie mit den für die Krümmungsmittelpunktkurve[1]) geltenden Ausdrücken folgt der Satz:

Die sphärische Binormalen- und Tangenten-Fußpunktkurve stehen zu der Ausgangs- und ersten Polarkurve in derselben Beziehung, wie die Krümmungsmittelpunktkurve von Ausgangs- und erster Polarkurve zu ihren Hauptkurven.

1) Vgl. Schell-Salkowski a. a. O. S. 91 ff.

Zum Schluß möge noch darauf hingewiesen werden, daß man die im vorstehenden behandelten Tangenten-, Binormalen- und Hauptnormalen-Fußpunktkurven auch als Sonderfälle derjenigen Kurven betrachten kann, die entstehen, wenn man von dem Erzeugungszentrum E aus die Lote nicht auf die Geraden OT, OH und OB fällt, sondern auf die durch je zwei von diesen gelegten Ebenen.

Es seien in Fig. 8 P_1 und P_2 die Bildpunkte zweier Triederkanten. Fällt man nun von E aus das Lot auf die Ebene dergestalt, daß die Projektion QO mit P_1O den Winkel ε bildet, so nehmen die Koordinaten von P_ε folgende Form an:

$$\bar{x}_\varepsilon = \bar{x}_1 \sin\varepsilon + \bar{x}_2 \cos\varepsilon$$
$$\bar{y}_\varepsilon = \bar{y}_1 \sin\varepsilon + \bar{y}_2 \cos\varepsilon$$
$$\bar{z}_\varepsilon = \bar{z}_1 \sin\varepsilon + \bar{z}_2 \cos\varepsilon$$

wobei $\bar{x}_1$, $\bar{y}_1$, $\bar{z}_1$ und $\bar{x}_2$, $\bar{y}_2$, $\bar{z}_2$ die Koordinaten von P_1 und P_2 sind.

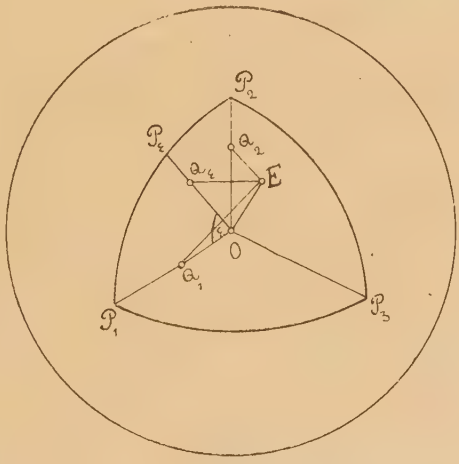

Fig. 8.

Hieraus ergeben sich unter Benutzung der oben entwickelten allgemeinen Formeln die Bestimmungsstücke der Fußpunktkurve (Q_1).

Für die Koordinaten von (Q_1) erhält man aus (3) nach einigen Umformungen:

$$\left.\begin{aligned} x_\varepsilon &= \bar{x}_1 \sin^2\varepsilon \Sigma a\bar{x}_2 + \sin\varepsilon\cos\varepsilon(\bar{x}_1+\bar{x}_2) + \bar{x}_2\cos^2\varepsilon\Sigma a\bar{x}_1 \\ y_\varepsilon &= \bar{y}_1 \sin^2\varepsilon \Sigma a\bar{y}_2 + \sin\varepsilon\cos\varepsilon(\bar{y}_1+\bar{y}_2) + \bar{y}_2\cos^2\varepsilon\Sigma a\bar{y}_1 \\ z_\varepsilon &= z_1 \sin^2\varepsilon \Sigma a z_2 + \sin\varepsilon\cos\varepsilon(\bar{z}_1+\bar{z}_2) + \bar{z}_2\cos^2\varepsilon\Sigma a\bar{z}_1 \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

In entsprechender Weise erhält man für den zugehörigen Radiusvektor mit Hilfe von Formel (4) den folgenden Ausdruck:

$$w_\varepsilon = w_1 \sin\varepsilon + w_2 \cos\varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Besonderes Interesse bietet dabei der Fall, daß es sich um die auf dem Bilde der rektifizierenden Geraden entstehende Fußpunktkurve handelt. Unter dieser Voraussetzung wird $\varepsilon = H$, und für den zugehörigen Vektorradius erhält man den Ausdruck:

$$w_H = \cos H\Sigma a\alpha + \sin H\Sigma a\lambda.$$

Wie die Gleichungen (32) und (33) schon erkennen lassen, sind indessen bei einer solchen Verallgemeinerung wesentlich neue

Kurven nicht zu erwarten. Die entstehenden Ausdrücke werden sich unter Auftreten des Winkels ε in additiver Weise aus den für (B_1), (T_1), (H_1) geltenden Werten zusammensetzen und sonst ganz analog gebaut sein. Auf die weitere Betrachtung dieser allgemeinen Fußpunktkurven soll deshalb hier verzichtet werden.

4. Beispiele. Bevor von den sphärischen Fußpunktkurven auf das Aoustsche Problem Anwendung gemacht wird, seien zur Erläuterung die sphärischen Fußpunktkurven einiger spezieller sphärischer Kurven betrachtet.

Die einfachste sphärische Kurve ist ein größter Kugelkreis. Für diesen stellt sich die zugehörige Fußpunktkurve in jedem Fall als Schnitt einer Ebene mit der inneren kleinen Kugel dar, sie ist also immer ein Kreis. In den Grenzfällen, je nach der Lage des festen Punktes E, wird es ein größter Kugelkreis oder ein Punkt.

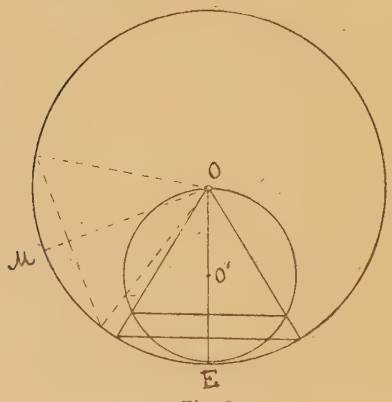

Fig. 9.

Ungleich schwieriger gestalten sich die Verhältnisse bei der Betrachtung eines kleinen Kugelkreises. Zur Erläuterung der dabei möglichen Fälle ist in Fig. 9 ein durch den festen Punkt E gelegter Äquatorialschnitt dargestellt.

Fällt das Erzeugungszentrum E mit dem Mittelpunkt M des kleinen Kreises zusammen, so entsteht als Fußpunktkurve wieder ein kleiner Kreis. Es ist der Schnitt einer Kugel mit einem Kreiskegel, dessen Achse gleichzeitig Durchmesser der großen Kugel ist. Bezeichnet man mit α den Winkel zwischen der Erzeugenden des Kegels und seiner Achse, so entsteht, wie man leicht erkennt, für $\alpha = \frac{\pi}{4}$ auf der kleinen Kugel ein größter Kugelkreis als sphärische Fußpunktkurve; für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ein Punkt.

Fällt das Erzeugungszentrum E nicht mit dem Mittelpunkt des kleinen Kreises zusammen, so entsteht als Fußpunktkurve ein sphärischer Kegelschnitt; und zwar handelt es sich um den Durchschnitt eines Kreiskegels mit einer Kugel, deren Oberfläche die Spitze des Kegels enthält.

Um die kartesischen Koordinaten der entstehenden Kurve zu erhalten, setze man die Koordinaten eines kleinen Kugelkreises

$$x = m\cos\varphi; \qquad y = m\sin\varphi; \qquad z = \sqrt{1-m^2}$$

in die Gleichung (3) ein. Man erhält auf diese Weise nach einigen Umformungen:

$$x = am^2\cos^2\varphi + \frac{b}{2}m^2\sin 2\varphi + mc\sqrt{1-m^2}\cos\varphi$$

$$y = am^2\sin 2\varphi + \frac{b}{2}m^2\sin^2\varphi + mc\sqrt{1-m^2}\sin\varphi$$

$$z = \sqrt{1-m^2}\,(a\cos\varphi + b\sin\varphi + c)$$

Hieraus findet man für die auf der Äquatorebene liegende Projektionskurve

$$[(x^2+y^2) - m^2(ax+by)]^2 = c^2m^2(x^2+y^2)(1-m^2);$$

es ist eine Kurve vierter Ordnung mit der Polargleichung

$$r = m^2(a\cos\varphi + b\sin\varphi + c\sqrt{1-m^2}).$$

Da nun die Schraubenlinien bei der Abbildung zwei kleine und einen größten Kugelkreis als Bilder der Tangente, Binormale und Hauptnormale ergeben, gilt folgendes:

Die sphärische Tangenten-, Binormalen- und Hauptnormalen-Fußpunktkurve jeder Schraubenlinie besteht aus zwei sphärischen Kegelschnitten und einem kleinen Kugelkreis.

Mit den für die Kugelkreise gewonnenen Ergebnissen ist auch die sphärische Schraubenlinie der vorliegenden Betrachtung zugänglich.

Die Kurve konstanter Steigung auf der Kugel wird erzeugt durch den Peripheriepunkt eines größten Kugelkreises, der ohne die Kugel zu verlassen auf einem festen kleinen Kreise abrollt. Sie ist mit anderen Worten eine sphärische Evolvente dieses Kreises.

Beim Übergang zu den Fußpunktkurven wird unabhängig von der Lage von E der rollende große Kreis immer zu einem kleinen Kreis der inneren Kugel.

Läßt man nun zunächst das Erzeugungszentrum E mit dem Pol der Schraubenlinie zusammenfallen, so gibt der feste kleine Kreis auf der kleinen Kugel wieder einen Kreis. In diesem Fall wird also die zugehörige sphärische Fußpunktkurve durch den Peripheriepunkt eines kleinen Kugelkreises erzeugt, der, ohne die

Kugel zu verlassen, auf einem anderen festen Kugelkreis abrollt. Es ist mithin eine sphärische Epizykloide.[1])

Ausgehend von den Koordinaten der sphärischen Schraubenlinie ergeben sich unter Benutzung der allgemeinen Formel in (3) die Koordinaten der entstehenden sphärischen Epizykloide in der Form

$$x = \frac{1}{4}\cos^4\alpha \cdot \cos\sigma\left[\frac{\sin(k+1)\sigma}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{\sin(k-1)\sigma}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right]$$

$$y = \frac{1}{4}\cos^4\alpha \cdot \cos\sigma\left[\frac{\cos(k+1)\sigma}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{\cos(k-1)\sigma}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right]$$

$$z = \frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha} \cdot \cos^2\sigma,$$

wobei α der konstante Steigungswinkel der sphärischen Schraubenlinie $k = \frac{1}{\cos\alpha}$ und σ ihr Schmiegungswinkel ist.

Die Basiskurve derselben ist ein ebenes Gebilde, das mit der ebenen Epizykloide eine gewisse Ähnlichkeit aufweist. Die fragliche Kurve entsteht durch den Punkt einer Ellipse, die, ohne zu gleiten, auf einem Kreise abrollt, der sie von innen berührt.[2])

Fällt der feste Punkt E nicht mit dem Pol der Schraubenlinie zusammen, so entsteht als sphärische Fußpunktkurve der geometrische Ort eines Kugelkreispunktes, wobei der Kreis auf einem sphärischen Kegelschnitt abrollt und von dem Kegelschnitt von innen berührt wird. Die dabei entstehende Kurve verhält sich zur sphärischen Epizykloide wie die eben erwähnte Ellipsenrollkurve zur Epizykloide. Die Basiskurve dieses Gebildes kann man sich erzeugt denken von einer Ellipse, die auf der oben bei der Fußpunktkurve eines kleinen Kugelkreises erhaltenen Basiskurve vierten Grades abrollt.

Nun ist die sphärische Schraubenlinie das Tangenten- und auch Binormalenbild einer Böschungslinie[3]), deren Hauptnormalenbild ein kleiner Kugelkreis ist. Man hat mithin:

Die sphärischen Fußpunktkurven einer Böschungslinie sind, wenn die Achse der zugehörigen Schraubenlinie mit

1) F. G. Teixera, Courbes spéciales remarquables, Coimbra 1909.
2) H. Ekama, Archiv f. Math. u. Ph. (2) 8 S. 348.
3) Es sind damit die Geodätischen auf Böschungsflächen gemeint (vgl. S. 69).

dem Erzeugungszentrum zusammenfällt, ein kleiner Kugelkreis und zwei sphärische Epizykloiden; im allgemeinen Fall ein sphärischer Kegelschnitt bzw. zwei Kurven, die entstehen, wenn auf einem solchen ein kleiner Kreis abrollt.

5. Die sphärischen Fußpunktkurven einer A.-Kurve. Betrachtet man nun im besonderen die sphärischen Fußpunktkurven einer Raumkurve, welche der A.-Bedingung genügt, so lassen sich für diese einige bemerkenswerte Gleichungen gewinnen.

Den in Fig. 2 betrachteten Abschnitten der A.-Kurve

$$P_1 B_1 = h, \quad B_1 T_1 = h_0; \quad B_1 H_1 = \varrho - \varrho_0 \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

entsprechen nach der Abbildung die Vektorradien der Fußpunktkurven (B_1), (T_1) und (H_1). Da der Voraussetzung gemäß für den ganzen Verlauf der Kurve die Entfernung $P_1 L_1$ den konstanten Wert m hat, der sich bei der Abbildung auf die Strecke

$$OE = 1$$

reduziert, erhält man aus (34) durch Verbindung mit Gleichung (6) folgende Relationen:

$$\left.\begin{aligned} h &= m\Sigma a\lambda = mw_1 \\ h_0 &= m\Sigma a\alpha = mw_2 \\ \varrho - \varrho_0 &= m\Sigma a\, l = mw_3 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Nach (7) ist in jedem Falle

$$w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 1,$$

mithin liefert (35) als für A.-Kurven notwendige und hinreichende Bedingung die Gleichung

$$h^2 + (\varrho - \varrho_0)^2 + h_0^2 = m^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Dies dürfte wohl der einfachste analytische Ausdruck sein, auf den sich die A.-Bedingung bringen läßt. Er läßt sich übrigens auch direkt auf geometrischem Wege aus Fig. 2 ablesen.

In dem bei H_1 rechtwinkligen Dreieck $P_1 H_1 L_1$ ist nämlich

$$\begin{aligned} P_1 L_1 &= m \\ P_1 H_1 &= \varrho - \varrho_0 \\ L_1 H_1^2 &= h^2 + h_0^2. \end{aligned}$$

Wendet man nun auf $P_1 L_1 H_1$ den Satz des Pythagoras an, so folgt unmittelbar (36).

Es ist vielleicht nicht uninteressant, darauf hinzuweisen, daß Gleichung (36) das erste Integral derjenigen Differentialgleichung vierten Grades ist, die Aoust seinen Betrachtungen zugrunde legt. Um dies zu erkennen, differentiiere man (36). Es wird

$$h\,dh + \frac{dh}{d\sigma}\cdot\frac{d^2h}{d\sigma^2} + h_0\,dh_0 = 0.$$

Sieht man von dem Vorzeichen ab, so ist in jedem Fall

$$h_0 = \frac{d\varrho_0}{d\tau} = \frac{d\varrho}{d\tau} + \frac{d}{d\tau}\left(\frac{dh}{d\sigma}\right).$$

Führt man an dieser Stelle in Übereinstimmung mit Aoust zur Vereinfachung eine Funktion

$$\varphi = \frac{d\tau}{d\sigma}$$

ein, so ergibt sich nach einigen Zwischenrechnungen

$$h_0\,dh_0 = \frac{1}{\varphi^2}\left[\frac{d\varrho}{d\sigma} + \frac{d^3\varrho}{d\sigma^3}\right]\left[\frac{d^2\varrho}{d\sigma^2} + \frac{d^4\varrho}{d\sigma^4}\right] - \frac{1}{\varphi^3}\left[\frac{d\varrho}{d\sigma} + \frac{d^3\varrho}{d\sigma^3}\right]^2\frac{d\varphi}{d\sigma};$$

dieser Wert liefert in Verbindung mit dem obigen folgende Differentialgleichung

$$\frac{d^2\varrho}{d\sigma^2}\left[\frac{d\varrho}{d\sigma} + \frac{d^3\varrho}{d\sigma^3}\right] + \frac{1}{\varphi^2}\left[\frac{d\varrho}{d\sigma} + \frac{d^3\varrho}{d\sigma^3}\right]\left[\frac{d^2\varrho}{d\sigma^2} + \frac{d^4\varrho}{d\sigma^4}\right] - \frac{1}{\varphi^3}\left[\frac{d\varrho}{d\sigma} + \frac{d^3\varrho}{d\sigma^3}\right]\frac{d\varphi}{d\sigma} = 0.$$

Solange es sich nicht um eine Kurve konstanter Krümmung handelt, ist der Ausdruck $\frac{d\varrho}{d\sigma} + \frac{d^3\varrho}{d\sigma^3}$ immer von Null verschieden, es wäre nämlich sonst

$$\varrho = -\frac{d^2\varrho}{d\sigma^2} + \text{const.}$$

oder

$$\varrho_0 = \left|\varrho + \frac{d^2\varrho}{d\sigma^2}\right| = \text{const}$$

Bei dieser Einschränkung erhält man nach Division mit $\frac{d\varrho}{d\sigma} + \frac{d^3\varrho}{d\sigma^3}$:

$$\frac{d^2\varrho}{d\sigma^2} + \frac{1}{\varphi^2}\cdot\frac{d^2\varrho}{d\sigma^2} + \frac{1}{\varphi^2}\cdot\frac{d^4\varrho}{d\sigma^4} - \frac{1}{\varphi^3}\left[\frac{d\varrho}{d\sigma} + \frac{d^3\varrho}{d\sigma^3}\right]\frac{d\varphi}{d\sigma} = 0.$$

Da auch die Funktion φ stets $\neq 0$ ist, ergibt sich nach einigen Umformungen folgende Differentialgleichung vierten Grades:

$$\frac{d^4\varrho}{d\sigma^4} + (1+\varphi^2)\frac{d^2\varrho}{d\sigma^2} - \frac{1}{\varphi}\left[\frac{d\varrho}{d\sigma} + \frac{d^3\varrho}{d\sigma^3}\right]\frac{d\varphi}{d\sigma} = 0.$$

Diese stimmt völlig mit der im ersten Abschnitt (Gleichung 4) angegebenen, von Aoust gefundenen Differentialgleichung überein, womit gezeigt wird, daß (36) ihr erstes Integral ist.

Führt man in (36) die Radien der Schmiegungskugeln ein, die zur Ausgangs- und ersten Polarkurve gehören, so kann man für diese Gleichung auch schreiben

$$R^2 - 2\,\varrho\,\varrho_0 + R_0{}^2 = m^2.$$

Für jede A.-Kurve ist die Summe der Quadrate der Schmiegungskugelradien von Ursprungs- und erster Polarkurve, vermindert um das doppelte Produkt der entsprechenden Krümmungsradien gleich dem Quadrat des konstanten Abstandes der einander zugeordneten Kurven.

Die Bedingungsgleichung (36) läßt übrigens ohne weiteres erkennen, daß jede Kurve konstanter Krümmung eine A.-Kurve ist. Für die ersteren ist nämlich in jedem Fall

$$\varrho = \varrho_0 \qquad \text{und} \qquad h = 0.$$

Diese Werte erfüllen Gleichung (36) identisch. Die zugeordnete A.-Kurve hat von der Ausgangskurve den konstanten Abstand $m = 0$. Man gewinnt also auch auf diesem Wege den bekannten Satz:

Jede Kurve konstanter Krümmung ist eine A.-Kurve, deren zugeordnete Kurve mit der Ausgangskurve zusammenfällt.

Mit Hilfe einer Kurve konstanter Krümmung und einer A.-Kurve kann man nun beliebig viele neue A.-Kurven erzeugen. Teilt man die Verbindungsgerade von zwei einander parallel zugeordneten Raumkurven nach einem konstanten Verhältnis $a : b$, so ist die entstehende Mittelkurve den beiden anderen parallel, und es gelten für dieselbe in jedem Fall die Beziehungen[1])

$$\varrho_3 = \frac{a\varrho_2 + b\varrho_1}{a+b}, \qquad h_3 = \frac{ah_2 + bh_1}{a+b}.$$

Wird eine beliebige A.-Kurve einer solchen konstanter Krümmung zugeordnet, so folgt für die Mittelkurve

$$\varrho_3 = \frac{a\varrho + bk}{a+b}, \qquad h_3 = \frac{ah}{a+b},$$

Entsprechendes gilt für die erste Polarkurve

$$\varrho_{0\,3} = \frac{a\varrho_0 + bh}{a+b}, \qquad h_{0\,3} = \frac{ah_0}{a+b}.$$

Man verifiziert leicht, daß diese Ausdrücke der Gleichung (36) genügen. Die neue A.-Kurve hat von ihrer zweiten Polarkurve den Abstand

$$m' = \frac{m \cdot a}{a+b}.$$

Man gewinnt also den folgenden Satz:

Ordnet man einer beliebigen A.-Kurve eine solche konstanter Krümmung parallel zu, so sind alle Kurven, welche die Verbindungsgrade derselben in einem konstanten Verhältnis teilen, wieder A.-Kurven.

1) Schell-Salkowski a. a. O. S. 177.

Dieser Satz gilt jedoch nur für die Kombination einer A.-Kurve mit einer solchen konstanter Krümmung. Er gestattet im allgemeinen keine Erweiterung auf die parallele Zuordnung beliebiger A.-Kurven.

Um die Bedingung zu erkennen, die zwei parallele A.-Kurven erfüllen müssen, damit die aus ihnen hervorgehende Mittelkurve ebenfalls der A.-Bedingung genügt, setze man die oben angegebenen allgemeinen Ausdrücke in (36) ein. Man erhält

$$(a\,h' + b\,h'')^2 + [a\,(\varrho' - \varrho_0') + b\,(\varrho'' - \varrho_0'')]^2 + (a\,h_0' + b\,h_0'')^2 = \frac{m^2}{(a+b)^2}.$$

Für die Einzelkurven bestehen nun die Gleichungen

$$h'^2 + (\varrho' - \varrho_0')^2 + h_0'^2 = m'^2$$
$$h''^2 + (\varrho'' - \varrho_0'')^2 + h_0''^2 = m''^2.$$

Damit ergibt sich ein Ausdruck der folgenden Art:

$$h'h'' + (\varrho' - \varrho_0')(\varrho'' - \varrho_0'') + h_0' h_0'' = \frac{1}{2ab}\left[\frac{m^2}{(a+b)^2} - a^2 m'^2 - b^2 m''^2\right].$$

Die Mittelkurve genügt also dann und nur dann der A.-Bedingung, wenn für die Einzelkurven die Bedingung

$$h'h'' + (\varrho - \varrho_0')(\varrho'' - \varrho_0'') + h_0' h_0'' = \text{const.}$$

erfüllt ist. Dies ist z. B. der Fall, wenn die eine derselben eine solche konstanter Krümmung ist, denn für diese wird

$$h = \varrho - \varrho_0 = h_0 = 0.$$

Es trifft ferner zu für A.-Schraubenlinien.

Eine weitere, etwas andere Bedingungsgleichung für allgemeine A.-Kurven erhält man durch Differentiation der beiden ersten Ausdrücke in (35). Es wird

$$dh = m\,d(\Sigma a\lambda); \qquad dh_0 = m\,d(\Sigma a\alpha)$$

Durch Division folgt hieraus

$$\frac{dh}{dh_0} = \frac{d\sigma}{d\tau} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

Die Gleichung (36) ist das erste Integral hiervon. Man gewinnt folgenden Satz:

Für jede A.-Kurve verhalten sich die Differentiale der Abstände der Krümmungsmittelpunkte von den Mittelpunkten der Schmiegungskugeln für Ausgangs- und erste Polarkurve wie der Torsionswinkel zum Schmiegungswinkel.

Dieser Satz ist der für A.-Kurven geltende Spezialfall des in (9) für allgemeine sphärische Fußpunktkurven erkannten Sachverhaltes.

Führt man den schon mehrfach benutzten Winkel H ein, für den in jedem Fall

$$\operatorname{tg} H = -\frac{d\tau}{d\sigma}$$

ist, so kann an Stelle von (37) auch geschrieben werden

$$\frac{dh}{dh_0} = -\operatorname{ctg} H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Nun haben bekanntlich die Ausgangs- und erste Polarkurve parallele rektifizierende Ebenen, da anderseits die Tangenten von (P) und (P_0) aufeinander senkrecht stehen, erkennt man, daß $H + H_0 = \frac{\pi}{2}$ ist. Unter Beachtung dieser Tatsache geht (38) über in

$$dh : dh_0 = \cos H : \cos H_0.$$

Dem oben ausgesprochenen Satz kann man also auch die folgende Fassung geben:

Bei jeder A.-Kurve verhalten sich die Differentiale der Abstände der Krümmungsmittelpunkte vom Mittelpunkt der Schmiegungskugeln bei Ursprungs- und erster Polarkurve wie die cosinus der Winkel, welche die rektifizierenden Geraden dieser Kurven mit ihren Kurventangenten bilden.

Der oben betrachtete Winkel t, den die Tangente der Binormalenfußpunktkurve mit der Binormale bildet, nimmt für A.-Kurven, wenn man in (15) die aus (35) fließenden Werte einsetzt, folgende analytische Form an:

$$\cos t = \frac{\frac{1}{m} \cdot h}{\sqrt{1 - \frac{h_0^2}{m^2}}}.$$

Nun folgt aber aus (36)

$$1 - \frac{1}{m^2} h_0^2 = \frac{1}{m^2} (h^2 + [\varrho - \varrho_0]^2),$$

womit der Ausdruck für $\cos t$ übergeht in

$$\cos t = \frac{h}{\sqrt{h^2 + (\varrho - \varrho_0)^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

Hieraus gewinnt man mit den schon eingangs benutzten Formeln

$$h = \frac{d\varrho}{d\sigma}; \qquad \varrho_0 = \left| \varrho + \frac{dh}{d\sigma} \right|$$

die folgenden Werte:

$$\cos t = \frac{d\varrho}{\sqrt{d\varrho^2 + dh^2}}, \qquad \sin t = \frac{dh}{\sqrt{d\varrho^2 + dh^2}}$$

oder $$\operatorname{tg} t = \frac{dh}{d\varrho} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (40)$$

Für die erste Polarkurve ergibt sich in entsprechender Weise

$$\operatorname{tg} t_0 = \frac{dh_0}{d\varrho_0}.$$

Die Ausdrücke für die Bogenelemente, die Krümmungswinkel und Krümmungsradien kann man aus den allgemeinen abgeleiteten Formeln durch Einsetzung der speziell für A.-Kurven geltenden Werte gewinnen. Irgendwie bemerkenswerte Ergebnisse liefern dieselben nicht. Man erhält auf diese Weise z. B. für die Binormalenfußpunktkurve der A.-Kurven

$$ds_1 = \sqrt{dh^2 + d\varrho^2}$$

$$d\tau_1 = \sqrt{\left[d\sigma + d\left(\arcsin \frac{dh}{\sqrt{dh^2 + d\varrho^2}}\right)\right]^2 + \frac{d\tau_2 \, dh^2}{dh^2 + d\varrho^2}}$$

$$d\sigma_1 = -\left[\frac{d\tau \, d\varrho}{\sqrt{d\varrho^2 + dh^2}} + di\right].$$

Hierin ist i gemäß (24) bestimmt durch

$$\cos i = \frac{d\sigma + d\tau}{d\tau_1}; \qquad \sin i = \frac{d\tau}{d\tau_1} \frac{dh}{\sqrt{dh^2 + d\varrho^2}}.$$

Aus der Tatsache, daß (B_1) eine sphärische Kurve ist, kann man noch den folgenden Differentialausdruck für A.-Kurven herleiten.

Der Krümmungsradius der zur A.-Kurve gehörigen Kurve (B_1) ist einmal gegeben durch $\varrho_1 = \frac{ds_1}{d\tau_1}$ und ferner, da diese auf einer Kugel mit dem Radius $\frac{1}{2}$ liegt, durch $\varrho_1 = \frac{1}{2} \sin \sigma_1$. Durch Verbindung dieser Werte erhält man

$$\frac{\sqrt{dh^2 + d\varrho^2}}{d\tau_1} = -\frac{1}{2} \sin\left\{\int d\tau \frac{d\varrho}{\sqrt{dh^2 + d\varrho^2}} + i\right\},$$

eine Gleichung, die mit den für i geltenden Funktionswerten übergeht in

$$-2\sqrt{dh^2 + d\varrho^2} = (d\sigma + dt)\sqrt{dh^2 + d\varrho^2} \sin\left\{\int \frac{d\tau \, d\varrho}{\sqrt{dh^2 + d\varrho^2}}\right\} + dh \cos\left\{\int \frac{d\varrho \, d\tau}{\sqrt{dh^2 + d\varrho^2}}\right\}$$

oder, wenn zur Vereinfachung wieder der Winkel t eingeführt wird,

$$2\sqrt{dh^2 + d\varrho^2} = -\{(d\sigma + d\tau) \sin \int \cos t \, d\tau + dh \cos \int \cos t \, d\tau\}.$$

Zu irgendwelchen weiteren Entwicklungen ist dieser Ausdruck, der den von Aoust auf analytischem Wege gefundenen Differential-

gleichungen an die Seite gestellt werden kann, wohl kaum geeignet. Wird im besonderen t als konstant angenommen, so ergeben sich einige Vereinfachungen, doch kommt man in diesem Fall, wie weiter unten gezeigt wird, auf andere Weise bedeutend einfacher zum Ziel.

III.

Spezielle Aoustsche Kurven.

1. Eindeutige Bestimmung der A.-Kurven. Jede Raumkurve ist bekanntlich eindeutig erst durch zwei natürliche Gleichungen bestimmt. Man kann dieselben in sehr verschiedener Form aufstellen. Es ist am gebräuchlichsten, die beiden Krümmungen, bzw. Krümmungsradien, welche die Kurve charakterisieren, als Funktion eines Parameters, etwa der Bogenlänge oder der Summe der Schmiegungswinkel darzustellen. Man erhält auf diese Weise zwei Funktionen der folgenden Art:

$$\varrho = f_1(s),$$
$$r = f_2(s).$$

Hiervon stellt die erste einen Zusammenhang zwischen Kontingenzwinkel und Bogenlänge

$$F_1(s_1\tau) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

die zweite einen solchen zwischen Torsionswinkel und Bogenlänge dar

$$F_2(s_1\sigma) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Aus (1) und (2) geht durch eine einfache Elimination hervor, daß man den beiden natürlichen Gleichungen einer Raumkurve auch die folgende Gestalt geben kann:

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= f(\sigma), \\ \tau &= \varphi(\sigma) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Von diesen beiden Ausdrücken gibt der erste ein Abhängigkeitsverhältnis zwischen $\tau_1 \sigma_1 s$

$$\Phi(\tau_1 \sigma_1 s) = 0,$$

woraus man dann mit Hilfe der zweiten Gleichung die beiden Krümmungsradien als Funktion derselben unabhängigen Variabeln s oder σ mit Hilfe formaler Rechnungen bestimmen kann.

Die A.-Bedingung definiert als solche noch keine eindeutig bestimmten Kurven. Sie stellt, wenn man will, das dar, was zur Charakterisierung einer „Kurvenklasse“ gefordert wird. Eindeutig bestimmte A.-Kurven finden sich dann erst als „Sonderfälle“ in

allen anderen Kurvenklassen, so z. B. unter den Schraubenlinien oder den Geodätischen auf Böschungsflächen.

Man erkennt diese Tatsache am besten aus dem oben (Abschnitt II, 37) für A.-Kurven aufgestellten Kriterium

$$\frac{dh}{dh_0} = \frac{d\sigma}{d\tau} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Hierin sind h und h_0 abhängig von ϱ und σ, d. h. also letzten Endes von s, τ und σ, so daß die für A.-Kurven notwendige und hinreichende Bedingung in Gleichung (4) gleichbedeutend ist mit der ersten der in (3) gegebenen Funktionen.

Um eindeutig bestimmte A.-Kurven zu erhalten, muß man mithin noch eine einschränkende Zusatzbedingung geben. Dies kann dadurch geschehen, daß man eine beliebige Funktion zwischen den Größen s, τ, σ oder zweien von diesen vorgibt.

Im folgenden sollen die Fälle näher untersucht werden, welche auftreten, wenn die Zusatzbedingung in der Form $\varrho = f(\sigma)$ oder $\tau = \varphi(\sigma)$ vorgeschrieben ist.

2. A.-Kurven mit der Zusatzbedingung: $\varrho = f(\sigma)$. Wenn die für A.-Kurven notwendige Nebenbedingung durch eine Funktion

$$\varrho = f(\sigma) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

gegeben wird, so gestattet die oben hergeleitete allgemeine Gleichung (Abschn. II, 36)

$$h^2 + (\varrho - \varrho_0)^2 + h_0^2 = m^2 \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

in leichter Weise die Bestimmung der zweiten natürlichen Gleichung

$$\tau = \varphi(\sigma).$$

Aus (5) folgt durch wiederholte Differentiation

$$\left.\begin{aligned} h &= \frac{d\varrho}{d\sigma} = f'(\sigma), \\ \frac{dh}{d\sigma} &= \pm(\varrho - \varrho_0) = f''(\sigma) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Daraus ergibt sich unter Benutzung der allgemeingültigen Relation

$$\varrho_0 = \left|\varrho + \frac{dh}{d\sigma}\right| = |f(\sigma) + f''(\sigma)|$$

für den Abstand h_0 des Krümmungsmittelpunktes der ersten Polarkurve von dem Mittelpunkt ihrer Schmiegungskugeln

$$h_0 = \pm \frac{d\varrho_0}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{d\tau} = \pm [f'(\sigma) + f'''(\sigma)] \frac{d\sigma}{d\tau} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Setzt man nun die in (7) und (8) gefundenen Ausdrücke in (6) ein, so wird

$$f'^2(\sigma)+f''^2(\sigma)+[f'(\sigma)+f'''(\sigma)]^2\frac{d\sigma^2}{d\tau^2}=m^2.$$

Die Auflösung dieser Gleichung liefert

$$d\tau=\frac{f'(\sigma)+f'''(\sigma)}{\sqrt{m^2-f'^2(\sigma)-f''^2(\sigma)}}\,d\sigma,$$

mithin ergibt sich die gesuchte zweite natürliche Gleichung durch Ausführung der folgenden Integration

$$\tau=\int\frac{f'(\sigma)+f'''(\sigma)}{\sqrt{m^2-f'^2(\sigma)-f''^2(\sigma)}}\,d\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Hat man die lösende Funktion $\tau=\varphi(\sigma)$ festgestellt, so ist damit auch eine geometrisch anschauliche Erzeugungsweise der verlangten A.-Kurve gegeben.

In Verbindung mit der Ausgangsgleichung $\varrho=f(\sigma)$ kann man nämlich den Radius der ersten Krümmung auch als Funktion des Kontingenzwinkels darstellen. Es sei etwa

$$\varrho=g(\tau).$$

Die gesuchte Raumkurve kann mithin dadurch erzeugt werden, daß man ein ebenes Gebilde mit der natürlichen Gleichung

$$\varrho=g(\omega)$$

isoflexional, d. h. unter Erhaltung seiner Krümmung verbiegt.

Eine derartige Deformation kann jedoch in unendlich verschiedener Weise erfolgen und liefert mithin keine eindeutig bestimmte Kurve. Im vorliegenden Falle ist aber durch die Funktion $\tau=\varphi(\sigma)$ das Gesetz, nach dem die Torsion zu erfolgen hat, gegeben. Man ist nämlich imstande das Tangentenbild der zu erzeugenden Kurve anzugeben.

Die Tangenten-Indikatrix jeder Raumkurve hat die natürliche Gleichung[1])

$$\varrho_1=\sin H=\frac{d\tau}{\sqrt{d\tau^2+d\sigma^2}}$$

oder unter Benutzung der Funktion $\varphi'(\sigma)$

$$\varrho_1=\frac{\varphi'(\sigma)}{\sqrt{1+\varphi'^2(\sigma)}}.$$

Zur weiteren Diskussion ist es zweckmäßig $\tau=\varphi(\sigma)$ nach σ aufzulösen, um dann den Krümmungsradius des Tangentenbildes als

1) J. Rühlemann, Über sphärische Kurven, Diss., Halle 1919, S. 8.

Funktion von τ, d. h. also seiner Bogenlänge auszudrücken. Man erhält bei dieser Operation etwa eine Funktion der folgenden Art:

$$\varrho_1 = h(\tau).$$

Geht man mit dieser nun in das Gebiet der ebenen Kurven, so kommt eine ebene Kurve mit der natürlichen Gleichung

$$\bar{\varrho}_1 = h(s)$$

in Frage, die unter Beibehaltung der Krümmung auf die Bildkugel zu legen ist. Damit ist die Art der Torsion von

$$\bar{\varrho} = g(\omega)$$

eindeutig festgelegt. Die Verbiegung derselben hat so zu erfolgen, daß ihre gradlinig bleibenden Tangenten parallel bleiben den Vektorradien der sphärischen Kurve

$$\varrho_1 = h(s_1).$$

Auch die Art der ersten Polarkurve, die für A.-Kurven insofern von besonderer Bedeutung ist, als sie in der Zahl der sukzessiven Polarkurven mit der Ausgangskurve abwechselt, läßt sich mit Hilfe der hier gewonnenen Ausdrücke leicht bestimmen.

Es war allgemein

$$\varrho_0 = |f(\sigma) + f''(\sigma)|,$$

da nun ebenfalls für jede Raumkurve $|d\sigma| = d\tau_0$ ist, erkennt man, daß die erste Polarkurve, bzw. allgemein die Polarkurven ungerader Ordnung aus einer ebenen Kurve mit der natürlichen Gleichung

$$\bar{\varrho}_0 = f(\omega) + f''(\omega)$$

hervorgehen. Das Gesetz der anzuwendenden isoflexionalen Verbiegung folgt aus der Betrachtung des Binormalenbildes. Für diese gilt in jedem Fall

$$\varrho_2 = |\cos H| = \frac{|d\sigma|}{\sqrt{d\sigma^2 + d\tau^2}}.$$

Hierin wähle man σ, d. h. die Bogenlänge des Bildes der Binormalen, zur unabhängigen Variabeln. Es folgt sodann

$$\varrho_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi'^2(\sigma)}}.$$

Man ersieht also, daß es sich in diesem Fall um eine ebene Kurve

$$\varrho_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi'^2(\sigma)}}$$

handelt, die isoflexional auf die Kugel zu legen ist.

Die Verbiegung der ebenen Kurve

$$\bar{\varrho}_0 = |f(\omega) + f''(\omega)|$$

hat dann so zu erfolgen, daß ihre geradlinig bleibenden Tangenten parallel bleiben den Vektorradien der sphärischen Kurve

$$\varrho_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\varphi'^2(s_2)}}.$$

Der Integralausdruck in (9) läßt die ganze Schwierigkeit der analytischen Behandlung des A.-Problems erkennen. Da in ihm die Differentialquotienten bis hinauf zur dritten Ordnung vorkommen, kann man eine explizite Lösungsmöglichkeit des Integrals nur bei solchen Funktionen $f(\sigma)$ erwarten, die durch ein einfaches Bildungsgesetz der höheren Differentialquotienten ausgezeichnet sind. Die Betrachtungsmöglichkeit ist mithin im wesentlichen auf die Potenz, die sinus- und hyperbolische Sinus- und die Exponentialfunktion beschränkt. Diese vier Fälle sollen im folgenden noch genauer betrachtet werden.

3. Beispiele. a) Welches sind die beiden natürlichen Gleichungen derjenigen A.-Kurven, deren Krümmungsradius sich darstellen läßt als Potenz der Summe der Torsionswinkel?

Die hier in Frage kommende Nebenbedingung stellt sich also dar in der Form

$$\varrho = a\sigma^n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Den Fall $n = 0$ kann man gleich von vornherein ausschalten, da die Kurven konstanter Krümmung, die sich dabei ergeben würden, wie schon gezeigt, an sich der A.-Bedingung genügen.

Aus (10) folgt:

$$\begin{aligned} f\ (\sigma) &= a\sigma^n, \\ f'\ (\sigma) &= an\sigma^{n-1}, \\ f''(\sigma) &= an\,(n-1)\,\sigma^{n-2}, \\ f'''(\sigma) &= an\,(n-1)\,(n-2)\,\sigma^{n-3}. \end{aligned}$$

Diese Werte liefern mit Hilfe der allgemeinen Gleichung (9)

$$\tau = an\int \frac{\sigma^{n-1} + (n-1)\,(n-2)\,\sigma^{n-3}}{\sqrt{m^2 - a^2n^2\left[\sigma^{2(n-1)} + (n-1)^2\,\sigma^{2(n-2)}\right]}}\,d\sigma \quad . \quad (11)$$

Dieses Integral läßt sich nicht allgemein angeben; es sei daher die weitere Betrachtung auf einige spezielle Werte von n beschränkt.

Für $n = 1$ folgt aus (11):

$$\tau = a\int \frac{d\sigma}{\sqrt{m^2 - a^2}}.$$

Die Integration liefert

$$\tau = \frac{a\sigma}{\sqrt{m^2 - a^2}} + b.$$

Es handelt sich also um eine Schraubenlinie mit dem konstanten Steigungswinkel $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{a}{\sqrt{m^2 - a^2}}$;

die Bestimmungsgleichungen derselben lauten:

$$\varrho = a\sigma$$
$$r = \frac{a^2\sigma}{\sqrt{m^2 - a^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Für die natürliche Gleichung der zu tordierenden ebenen Kurve erhält man den Ausdruck

$$\bar{\varrho} = \frac{a^2}{\sqrt{m^2 - a^2}} w + ab .$$

Es ist dies ein Gebilde; das aus einem Kreise mit dem Radius ab und einer Kreisevolvente hervorgeht. Für $b = 0$ handelt es sich nur um die Evolvente eines Kreises mit dem Radius

$$r = \frac{a^2}{\sqrt{m^2 - a^2}} .$$

Man erhält also den Satz:

Die Evolvente eines Kreises mit dem Radius r liefert bei der Verbiegung dann und nur dann eine A.-Kurve, wenn man sie in eine Schraubenlinie mit der konstanten Steigung $\operatorname{tg}\alpha = -r$ *transformiert.*

Da für jede Schraubenlinie die erste Polarkurve wieder eine Schraubenlinie ist, erübrigt es sich hier, näher auf die für den Fall $n = 1$ auftretende erste Polarkurve einzugehen. Man erkennt leicht, daß auch sie aus einer Kreisevolvente hervorgeht.

Für $n = 2$ findet man aus (11)

$$\tau = 2a \int \frac{\sigma}{\sqrt{m^2 - (2a^2\sigma^2 + 1)}} d\sigma ,$$

wofür man auch schreiben kann

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{2\sigma}{\sqrt{\frac{m^2 - 1}{2a^2} - \sigma^2}} d\sigma .$$

Hieraus folgt durch Integration

$$\tau = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{m^2 - 1}{2a^2} - \sigma^2} \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

Wählt man nun die Ausgangsbedingungen derart, daß für $\tau = 0$ auch $\sigma = 0$ ist, so liefert (13)

$$2\tau^2 = \frac{m^2 - 1}{2a^2} - \sigma^2$$

oder, wenn zur Abkürzung

$$c = \frac{1}{2a}\sqrt{2(m^2-1)}$$

gesetzt wird:

$$\sigma^2 + 2\tau^2 = c^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Die Gleichung (14) läßt erkennen, daß man die hier auftretende Kurvenklasse in gewisser Weise als eine Verallgemeinerung der Böschungslinien auffassen kann, welche — wie weiter unten noch näher ausgeführt wird — der Relation

$$\tau^2 + \sigma^2 = c^2$$

genügen. —

Für den Fall $n = 2$ sind mithin die beiden natürlichen Gleichungen der betrachteten A.-Kurve

$$\varrho = a\sigma^2 = ac^2 - 2a\tau^2$$

$$\varrho = -\frac{a\sigma^3}{\sqrt{2(c^2-\sigma^2)}}.$$

Die Ausgangskurve geht durch isoflexionale Verbiegung aus der ebenen Kurve $\bar{\varrho} = ac^2 - 2a\omega^2$

hervor. Dies ist eine Mittelkurve, welche aus einem Kreise und der Evolvente einer Kreisevolvente entsteht. Um das Gesetz ihrer Verbiegung zu erkennen, betrachte man das Tangentenbild. Für dieses wird

$$\varrho_1 = \frac{d\tau}{\sqrt{d\tau^2 + d\sigma^2}};$$

da sich nun aus (14) für den Torsionswinkel der Ausdruck

$$d\sigma = -\frac{2\,d\tau}{\sqrt{c^2 - 2\tau^2}}$$

ergibt, folgt:

$$\varrho_1 = \sqrt{\frac{c^2 - 2\tau^2}{c^2 + 2\tau^2}}.$$

Die auf die Bildkugel zu legende ebene Kurve ist mithin bestimmt durch

$$\bar{\varrho}_1 = \sqrt{\frac{c^2 - 2s^2}{c^2 + 2s^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Das Maximum ihrer Krümmung erreicht sie für $s = 0$, hier wird $\varrho = 1$. Geht man von dieser Stelle aus zu negativen oder positiven Werten von s, so entstehen für $s = \pm\frac{c}{2}\sqrt{2}$ zwei asymptotische Punkte. Für Bogenlängen, deren absoluter Betrag größer ist als $\frac{c}{2}\sqrt{2}$, existiert die Kurve nicht mehr. Sie besteht mithin aus einem endlichen Kurvenstück von der Länge $s = c\sqrt{2}$, das sich asymptotisch um ihre

Endpunkte aufwickelt. Diese liegen symmetrisch zu der an der Stelle $s = 0$ errichteten Normale.

Die Gestalt der Kurve ist in annähernder Weise in Fig. 10 wiedergegeben.

Es besteht für dieselbe eine gewisse Ähnlichkeit mit einem Ast der ebenen Kurve

$$\varrho = \sin\left(\frac{s}{a}\right).$$

Aus der ebenen Kurve $\varrho = \sin\left(\frac{s}{a}\right)$ geht auf der Kugel die Kurve konstanter Torsion hervor. Das Tangentenbild einer A.-Kurve der Klasse $\sigma^2 = 2\tau^2 = c^2$ ist also einem Ast einer sphärischen Kurve konstanter Torsion sehr ähnlich.

Fig. 10.

Unter Zuhilfenahme der Fig. 10 kann man sich auch in etwas eine Vorstellung von der Raumkurve selbst machen, die zu diesem Tangentenbild gehört.

In den beiden Endpunkten degeneriert sie zu einer Geraden, deren Abbildungen die asymptotischen Punkte des Tangentenbildes liefern. Beginnt man die Betrachtung an einer solchen Stelle, so sieht man aus einer Geraden unendlich viele Windungen hervorgehen. Diese sind zunächst sehr steil, werden dann schwächer und schwächer bis die Kurve fast zur Schraubenlinie wird. Von da ab geht der Prozeß in entgegengesetztem Sinne rückwärts, bis die Kurve wieder zu Geraden degeneriert. Die zu der vorliegenden A.-Kurve gehörige erste Polarkurve hat die Gleichung

$$\varrho_0 = |f(\sigma) + f''(\sigma)| = a\tau_0^2 + 2a.$$

Sie entsteht also, genau wie die Ausgangskurve, ebenfalls durch Verbiegung einer aus Kreis und Kreisevolvente zweiten Grades hervorgehenden Mittelkurve. Auch das Verbiegungsgesetz ist der Ausgangskurve ganz entsprechend. Für das Tangentenbild der ersten Polarkurve, d. h. das Binormalenbild der Ausgangskurve erhält man

$$\varrho_2 = \frac{1}{|1 - \varphi'^2(\sigma)} = \frac{1}{|1 - 4a^2\sigma_2},$$

die zugehörige ebene Kurve wird bestimmt durch

$$\bar{\varrho}_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - 4a^2 s^2}}.$$

---

1) Wieleitner, Spezielle ebene Kurven, S. 322.

Sie entspricht weitgehend der beim Tangentenbild betrachteten Kurve.

Für $s = 0$ erreicht die Krümmung ihr Maximum, sie nimmt sodann nach beiden Seiten in demselben Sinne ab bis zu den asymptotischen Punkten, die für $s = \frac{1}{2\sqrt{a}}$ auftreten. Es handelt sich also auch hier um ein endliches Kurvenstück, und zwar von der Länge $s = \frac{1}{\sqrt{a}}$, das sich asymptotisch um seine Endpunkte wickelt.

Setzt man in der Gleichung (11) $n = 3$ oder $n = -1$, so ergeben sich elliptische Integrale. Wird $n > 3$ bzw. < -1, oder nimmt es gebrochene positive oder negative Werte an, so kommt man zu Integralen, die sich höchstens noch durch unendliche Reihen, aber nicht mehr in geschlossenen Ausdrücken diskutieren lassen.

b) A.-Kurven mit der Nebenbedingung:

$$\varrho = a \sin k\sigma \qquad \text{bzw.} \qquad \varrho = a \operatorname{Sin} k\sigma \,. \quad . \quad . \quad (17)$$

liefern Gebilde, die eine bemerkenswerte analytische Darstellung zulassen.

Aus (17) folgt:

$$\begin{aligned} f(\sigma) &= a \sin k\sigma & \text{bzw.} \quad f(\sigma) &= a \operatorname{Sin} k\sigma\,; \\ f'(\sigma) &= ak \cos k\sigma & f'(\sigma) &= ak \operatorname{Cof} k\sigma\,, \\ f''(\sigma) &= -ak^2 \sin k\sigma & f''(\sigma) &= ak^2 \operatorname{Sin} k\sigma\,, \\ f'''(\sigma) &= -ak^3 \cos k\sigma & f'''(\sigma) &= ak^3 \operatorname{Cof} k\sigma. \end{aligned}$$

Damit ergibt die allgemeine Formel in (9) die folgenden Integrale:

$$\tau = ak(1-k^2)\int \frac{\cos k\sigma \, d\sigma}{\sqrt{m^2 - a^2k^2\cos^2 k\sigma - a^2k^4 \sin^2 k\sigma}}$$

bzw.

$$\tau = ak(1+k^2)\int \frac{\operatorname{Cof} k\sigma \, d\sigma}{\sqrt{m^2 - a^2k^2 \operatorname{Cof}^2 k\sigma - a^2k^4 \operatorname{Sin}^2 k\sigma}},$$

setzt man hierin

$$\sin^2 k\sigma = 1 - \cos^2 k\sigma$$
$$\operatorname{Sin}^2 k\sigma = \operatorname{Cof}^2 k\sigma - 1\,,$$

so wird

$$\tau = ak(1-k^2)\int \frac{\cos k\sigma \, d\sigma}{\sqrt{(m^2 - a^2k^4) + a^2k^2(k^2-1)\cos^2 k\sigma}}$$

bzw.

$$\tau = ak(1+k^2)\int \frac{\operatorname{Cof} k\sigma \, d\sigma}{\sqrt{(m^2 + a^2k^4) - a^2k^2(k^2+1)\operatorname{Cof}^2 k\sigma}}.$$

Bevor an die allgemeine Auflösung dieser Quadraturen gegangen wird, sei bemerkt, daß die erste Polarkurve aller dabei entstehenden

A.-Kurven stets durch Verbiegung einer ebenen Zykloide hervorgeht. Es folgt dies aus der gewählten Nebenbedingung $\varrho = a \sin k\sigma$, denn diese liefert

$$\varrho_0 = \left| \varrho + \frac{dh}{d\sigma} \right| = a(1-k^2) \sin k\tau_0.$$

Beginnt man nun die abwechselnde Folge der einander kongruenten Polarkurven mit dieser isoflexional verbogenen Zykloide, so zeigt sich, daß — in Übereinstimmung mit einem Kreise, aber im Gegensatz z. B. zur Kreisevolvente ersten Grades — eine ebene Zykloide in unendlich verschiedener Weise zu einer A.-Kurve verbogen werden kann. Das dabei einzuhaltende Verbiegungsgesetz ist abhängig von dem Wert, den der konstante Abstand der zugeordneten A.-Kurve annehmen soll.

Dieses erhält man durch Auflösung der für τ auf der vorhergehenden Seite gefundenen Integrale unter nachheriger Benutzung des auf S. 41ff. angedeuteten Weges.

Setzt man zum Zwecke der Integration

$$x = \sin k\sigma \quad \text{bzw.} \quad x = \mathfrak{Sin}\, k\sigma,$$

so ergeben sich die folgenden Ausdrücke:

$$\tau = \frac{1}{2k} ak(k^2-1) \int \frac{dx}{\sqrt{(m^2 - a^2k^4) + [a^2k^2(k^2-1) - (m^2 - a^2k^4)]\, x - a^2k^2(k^2-1)\, x^2}}$$

bzw.

$$\tau = \frac{1}{2k} ak(k^2+1) \int \frac{dx}{\sqrt{(m^2 + a^2k^4) + [a^2k^2(k^2+1) + (m^2 + a^2k^4)]\, x + a^2k^2(k^2+1)\, x^2}}$$

Nach Ausführung dieser Quadraturen und Rückkehr zur Ausgangsvariabeln erhält man schließlich:

$$\tau = \frac{1}{2k} \sqrt{k^2-1}\, \arcsin \left\{ \frac{a^2k^2(k^2-1)\cos^2 k\sigma - \frac{1}{2}[a^2k^2(k^2-1) - (m^2 - a^2k^4)]}{\sqrt{\frac{1}{4}[a^2k^2(k^2-1) - (m^2 - a^2k^4)]^2 + a^2k^2(k^2-1)(m^2 - a^2k^4)}} \right\}$$

bzw.

$$\tau = \frac{1}{2k} \sqrt{k^2+1}\, \mathfrak{Ar}\mathfrak{Sin} \left\{ \frac{a^2k^2(k^2+1)\,\mathfrak{Cof}^2 k\sigma - \frac{1}{2}[a^2k^2(k^2+1) + (m^2 + a^2k^4)]}{\sqrt{\frac{1}{4}[a^2k^2(k^2+1) + (m^2 + a^2k^4)]^2 - a^2k^2(k^2+1)(m^2 + a^2k^4)}} \right\}$$

Zur Vereinfachung seien an dieser Stelle einige abkürzende Konstanten eingeführt, welche sich von den ursprünglichen Größen a, k und m durch nachstehende Gleichungen herleiten.

$$c = \frac{2k}{\sqrt{k^2-1}} \quad \text{bzw.} \quad c_1 = \frac{2k}{\sqrt{k^2+1}},$$

$$2A = a^2 + \frac{m^2 - a^2k^4}{k^2(k^2-1)}, \qquad 2A_1 = a^2 - \frac{m^2 + a^2k^4}{k^2(k^2+1)},$$

$$B = \frac{1}{k^2(k^2-1)}\sqrt{\tfrac{1}{4}[a^2k^2(k^2-1)-(m^2-a^2k^4)]^2+a^2k^2(k^2-1)(m^2-a^2k^4)}$$

bzw.

$$B_1 = \frac{1}{k^2(k^2+1)}\sqrt{\tfrac{1}{4}[a^2k^2(k^2+1)+(m^2+a^2k^4)]^2-a^2k^2(k^2+1)(m^2+a^2k^4)}.$$

Hieraus erhält man unter Benutzung der in (17) gewählten Nebenbedingung für die Ausgangskurven der hier in Frage kommenden A.-Kurven die beiden folgenden natürlichen Gleichungen:

$$\varrho = \sqrt{A - B\cdot\sin c\tau}$$

bzw.

$$\varrho = \sqrt{B_1\cdot \mathfrak{Sin}\, c_1\tau - A_1}.$$

Die ebenen Gebilde, aus denen diese Raumkurven durch isoflexionale Verbiegung hervorgehen, sind mithin bestimmt durch

$$\bar{\varrho} = \sqrt{A - B\cdot\sin c\,\omega}$$

bzw.

$$\varrho = \sqrt{B_1\cdot \mathfrak{Sin}\, c_1\,\omega - A_1}.$$

Es sind dies Kurven aus der Gattung der Zykloiden und Pseudozykloiden. Sie haben der Periodizität der mittelbaren Argumente $\sin c\,\sigma$ bzw. $\mathfrak{Sin}\, c_1\,\sigma$ entsprechende periodisch wiederkehrende Spitzen, die mit sich wiederholenden Stellen stärkster Krümmung abwechseln. Aus der vorstehenden allgemeinen Lösung lassen sich nun in einfacher Weise einige bemerkenswerte Sonderfälle ableiten.

Der einfachste Fall liegt vor, wenn in den allgemeinen Ausdrücken für den Krümmungsradius $A = B$ bzw. $A_1 = B_1$ wird. Unter dieser Voraussetzung ist

$$a^2k^2(k^2-1) = m^2 - a^2k^4$$

bzw.

$$-a^2k^2(k^2+1) = m^2 - a^2k^4$$

und der Abstand der einander zugeordneten A.-Kurven bestimmt sich zu:

$$m = ak\sqrt{2k^2-1} \quad \text{bzw.} \quad m = iak\sqrt{2k^2+1}.$$

Die natürlichen Gleichungen der zur Verbiegung kommenden ebenen Kurven erhalten sodann die folgende Form:

$$\bar{\varrho} = a\sqrt{1-\sin c\,\omega} \qquad \text{bzw.} \qquad \bar{\varrho} = a\sqrt{\mathfrak{Sin}\, c_1\,\omega - 1}.$$

Die zugehörigen Bogenlängen ergeben sich aus den folgenden Integralen:

$$\bar{s} = a\int\sqrt{1-\sin c\omega}\,d\omega \qquad \text{bzw.} \qquad \bar{s} = a\int\sqrt{\mathfrak{Sin}\, c_1\,\omega - 1}\,d\omega.$$

Man erhält:

$$\bar{s} = a\sqrt{1+\sin c\,\omega} \qquad \text{bzw.} \qquad \bar{s} = a\sqrt{\mathfrak{Sin}\, c_1\,\omega + 1}.$$

Durch Quadrierung und nachfolgende Addition der für $\bar{\varrho}$ und $\bar{s}$ gefundenen Werte erhält man die nachstehenden Relationen:

$$\bar{\varrho}^2 + \bar{s}^2 = 2a^2 \quad \text{bzw.} \quad \bar{\varrho}^2 - \bar{s}^2 = 2a^2.$$

Es handelt sich also im ersten Fall um eine Zykloide und im zweiten um eine sogenannte Pseudozykloide[1]) ohne Spitze. Die letztere verhält sich für $\omega = 0$ wie eine Kettenlinie gleichen Widerstandes, um dann mit wachsendem s in immer größer und größer werdenden Windungen in der Unendlichkeit zu verschwinden. —

Einen anderen Spezialfall erhält man durch Angabe eines bestimmten Wertes für die Ausdrücke

$$m - a^2k^4 \quad \text{bzw.} \quad m + a^2k^4.$$

Setzt man dieselben $= 0$, so wird

$$m = ak^2 \quad \text{bzw.} \quad m = iak^2.$$

Um das hier gültige Verbiegungsgesetz zu erkennen, geht man in diesem Fall am besten von den auf Seite 47 für τ gefundenen Integralen aus. Diese liefern:

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = -\sqrt{k^2 - 1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{d\tau}{d\sigma} = i\sqrt{1 + k^2}.$$

Es handelt sich also um Schraubenlinien mit der konstanten Steigung

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{k^2 - 1} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}\alpha = -i\sqrt{1 + k^2}.$$

Sie entstehen durch Verbiegung der ebenen Kurven

$$\bar{\varrho} = a \sin k_1 \omega$$
$$\bar{\varrho} = a \operatorname{Sin} k_2 \omega.$$

Beachtet man, daß hieraus durch Integration

$$s = \frac{a}{k_1} \cos k_1 \omega \quad \text{und} \quad s = \frac{a}{k^2} \operatorname{Cof} k^2 \omega$$

folgt, so können die natürlichen Gleichungen der betreffenden ebenen Kurven dargestellt werden durch

$$\varrho^2 + k_1^2 s^2 = a^2 \quad \text{und} \quad \varrho^2 - k_2^2 s^2 = a^2.$$

Hiervon stellt die erste eine allgemeine Zykloide dar, und zwar handelt es sich, je nachdem ob

$$\frac{1-k}{2k} \gtreqless 0,$$

um eine Epizykloide, gemeine Zykloide oder Hypozykloide.

Die zweite Kurve ist wieder eine Pseudozykloide ohne Spitze.

---

1) E. Cesàro-Kowalewski, Vorl. über nat. Geometrie, 1901, S. 10.

Man kann im Anschluß hieran den folgenden Satz aussprechen:

Verbiegt man eine Zykloide oder eine Pseudozykloide ohne Spitze zu Schraubenlinien, so genügen diese der A.-Bedingung.

Da die A.-Schraubenlinien weiter unten noch genauer behandelt werden sollen, mag hier von der weiteren Betrachtung dieser Kurven abgesehen werden. Es wird sich später zeigen, daß die Basiskurve dieser speziellen A.-Schraubenlinie immer eine gemeine Zykloide ist, während die Kurven selbst einem geraden parabolischen Zylinder angehören.

c) Zu einer weiteren A.-Kurve kommt man, wenn als Zusatzgleichung die Erfüllung der Relation

$$\varrho = a e^{k\sigma} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

gefordert wird. Diese liefert

$$\left.\begin{aligned} f(\sigma) &= a e^{k\sigma} \\ f'(\sigma) &= a k e^{k\sigma} \\ f''(\sigma) &= a k^2 e^{k\sigma} \\ f'''(\sigma) &= a k^3 e^{k\sigma} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

Daraus ergibt sich mit Hilfe von (9)

$$\tau = a k (1 + k^2) \int \frac{e^{k\sigma} d\sigma}{\sqrt{m^2 - a^2 k^2 (1 + k^2) e^{2k\sigma}}}.$$

Führt man zum Zwecke der Integration eine neue Variable

$$t = e^{k\sigma}$$

ein, so folgt:

$$d\sigma = \frac{dt}{kt};$$

setzt man nun ferner noch zur Abkürzung

$$\frac{m^2}{a^2 k^2 (1 + k^2)} = b^2; \qquad \frac{1}{k}\sqrt{1 + k^2} = c,$$

so folgt

$$\tau = c \int \frac{dt}{\sqrt{b^2 - t^2}}.$$

Die Integration bestimmt in diesem Fall bei passender Wahl der Ausgangsbedingungen

$$\tau = c \arcsin\left(\frac{t}{b}\right);$$

daraus findet man

$$e^{k\sigma} = b \sin\frac{\tau}{c}.$$

Die Differentation dieser Gleichung liefert

$$d\sigma = \frac{1}{kc} \operatorname{ctg}\left(\frac{\tau}{c}\right) \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

Die natürlichen Gleichungen der verlangten A.-Kurve lauten mithin:

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= a^{e\,k\sigma} = b \sin\left(\frac{\tau}{c}\right) \\ r &= \frac{a\,k\,e^{2k\sigma}}{e\sqrt{b^2 - e^{2k\sigma}}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

Die Ausgangskurve entsteht also durch Verbiegung einer ebenen Zykloide mit der natürlichen Gleichung

$$\bar{\varrho} = b \sin \frac{\omega}{c}.$$

Die zugehörige erste Polarkurve ist gemäß (19) bestimmt durch

$$\varrho_0 = a(1 + k^2)\, e^{k\tau_0},$$

sie liefert bei der Abwicklung ihrer Tangentenfläche eine logarithmische Spirale mit der natürlichen Gleichung

$$\bar{\varrho}_0 = a(1 + k^2)\, e^{k\omega}.$$

Um die Natur der vorliegenden A.-Kurve noch genauer zu erkennen, betrachte man den Winkel δ, den der Radius der Schmiegungskugel mit der Schmiegungsebene einschließt. Dieser ist allgemein bestimmt durch die Relation

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{h}{\varrho}.$$

Setzt man hier die in (19) erhaltenen Werte ein, so wird

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{ak^2 e^{k\sigma}}{ak\, e^{k\sigma}} = k;$$

man erkennt also, daß es sich hier um eine A.-Kurve handelt, für deren ganzen Verlauf der Winkel δ einen konstanten Wert hat.

Er wird übrigens dem oben betrachteten Winkel t gleich, den die Tangente der Binormalen-Fußpunktkurve mit der Binormale selbst einschließt (Abschn. II, 15). Speziell für A.-Kurven erhielt er den Wert

$$\operatorname{tg} t = \frac{dk}{d\varrho};$$

im vorliegenden Fall hat man daher

$$\operatorname{tg} t = \frac{ak^2 e^{k\sigma}}{ak\, e^{k\sigma}} = k.$$

Es handelt sich mithin um eine A.-Kurve, für die das Tangentenbild der Krümmungsmittelpunktskurve mit dem Tangentenbild der Binormalen-Fußpunktkurve zusammenfällt.

---

1) Schell-Salkowski a. a. O. S. 56.

Um diese Art der A.-Kurven zu erhalten, hat man eine Zykloide und eine logarithmische Spirale zu verbiegen. Das Verbiegungsgesetz der Ausgangskurve ergibt sich aus dem Tangentenbild der Kurve. Für dieses findet man aus (20):

$$\varrho_1 = \frac{d\tau}{\sqrt{d\sigma^2 + d\tau^2}} = \frac{kc}{\sqrt{k^2 c^2 + \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\tau}{c}\right)}};$$

hierin ist

$$kc = k \cdot \frac{1}{k}\sqrt{1+k^2},$$

so daß man für den Krümmungsradius erhält

$$\varrho_1 = \frac{\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{1 + k^2 + \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\tau}{c}\right)}}.$$

Die Indikatrix der Tangenten entsteht also aus der ebenen Kurve

$$\bar{\varrho}_1 = \frac{\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{1 + k^2 + \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\bar{\tau}}{c}\right)}}.$$

Die Gestalt derselben ist leicht erkennbar.

Das Maximum der Krümmung erreicht sie in den Punkten mit der Bogenlänge

$$\bar{s} = nc\frac{\pi}{2}; \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots$$

Hier wird $\operatorname{ctg}\left(\frac{s}{c}\right) = 0$ und die Krümmung der Einheit gleich. Asymptotische Punkte entstehen an den Stellen

$$\bar{s} = nc\,\pi\ ; \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots$$

denn für diese Werte wird $\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\bar{s}}{c}\right) = \infty^2$, womit die Krümmung dem Grenzwert 0 zustrebt.

Es handelt sich mithin um eine Laufmusterkurve, die aus einzelnen Zweigen mit der endlichen Länge $\bar{s} = c\pi$ bestehen und sich ständig um ihre Punkte asymptotisch aufwickeln. Sie ist übrigens der schon in einem früheren Beispiel zum Vergleich herangezogenen transzendenten Kurve

$$\varrho = A \cdot \sin\left(\frac{s}{a}\right)$$

weitgehend ähnlich. In der Nähe der Punkte $\bar{s} = nc\,\pi$ kann sie sogar mit wachsender Annäherung durch diese Gleichung selbst dargestellt werden.

Der Voraussetzung gemäß ist k eine endliche Konstante. Man kann dieselbe für große Werte von $\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\bar{s}}{c}\right)$ vernachlässigen, so daß unter dem Wurzelzeichen das zweite Glied verschwindet. Mit Hilfe elementarer Formeln erhält man in diesem Falle

$$\bar{\varrho}_1 = \sqrt{1+k^2}\sin\left(\frac{\bar{s}}{c}\right).$$

Das gleiche tritt ein, wenn k sehr klein ist. Der Grenzfall $k=0$ ist allerdings nicht möglich, denn damit würde das Tangentenbild zum Kugelkreis werden, die Kurve selbst zu einer solchen konstanter Krümmung, d. h. zu einer Kreiszylinderhelix.

In Figur 12 ist zur Erleichterung der Anschauung die Kurve $\varrho = A\sin\left(\frac{s}{a}\right)$ annäherungsweise wiedergegeben. Sie liefert, wie schon oben erwähnt, auf der Kugel eine solche konstanter Torsion. Das Tangentenbild einer A.-Kurve, für die der Winkel zwischen

Fig. 11.

Schmiegungsebene und Radius der Schmiegungskugeln konstant bleibt, ist mithin mit mehr oder weniger großen Annäherung eine sphärische Kurve konstanter Torsion.

Mit Hilfe der Figur 11 kann man sich wieder ein gewisses Bild von dem Verlauf der zugehörigen A.-Raumkurve machen. Die Verhältnisse liegen hier ganz ähnlich wie bei der oben betrachteten Kreisevolvente zweiten Grades. Die hier zu tordierende Zykloide liefert in den asymptotischen Punkten des Tangentenbildes eine Gerade. Von da ab ergeben sich dann unendlich viele, zunächst sehr steile Windungen, die allmählich schwächer und schwächer werden, bis die Kurve für ein gewisses Stück fast zur Schraubenlinie wird. Darauf geht der Prozeß rückläufig, bis die Kurve wieder zur Geraden degeneriert. Dies wiederholt sich unendlich oft.

Die erste Polarkurve ging, wie gezeigt, aus einer logarithmischen Spirale hervor. Das dafür gültige Verbiegungsgesetz folgt aus dem Binormalenbilde. Für dieses hat man

$$\varrho_2 = \frac{|d\sigma|}{\sqrt{d\tau^2 + d\sigma^2}}.$$

Durch Differentiation der für τ gefundenen Funktion erhält man

$$d\tau = \frac{ck\,e^{k\sigma}}{\sqrt{b^2 - e^{2k\sigma}}}\,d\sigma = \frac{\sqrt{1+k^2}\cdot e^{k\sigma}}{\sqrt{b^2 - e^{2k\sigma}}}\,d\sigma;$$

damit ergibt sich für das Binormalenbild

$$\varrho_2 = \sqrt{\frac{b^2 - e^{2k\sigma}}{b^2 + (k-1)\,e^{2k\sigma}}}.$$

Es ist also eine ebene Kurve mit der natürlichen Gleichung

$$\bar{\varrho}_2 = \sqrt{\frac{b^2 - e^{2k\sigma}}{b^2 + (k-1)\,e^{2k\sigma}}}$$

zu betrachten.

Ganz unabhängig davon, ob $k \gtrless 1$ ist, hat diese Kurve einen asymptotischen Punkt für $\bar{s} = \ln b$, hier strebt der Krümmungsradius dem Grenzwert 0 zu. Für $\bar{s} = -\infty$ ergibt sich ein asymptotischer Kreis mit dem Krümmungsradius 1. Da vorher der Radius der Krümmung dauernd kleiner als 1 bleibt, wickelt sich die Kurve in unendlich vielen Windungen an die innere Peripherie des asymptotischen Kreises heran. Sie hat etwa die in Fig. 12 angedeutete Gestalt.

Fig. 12.

Die Polarkurve entspringt also aus einer Geraden, die den asymptotischen Punkt des Binormalenbildes erzeugt, und bildet dann immer flacher und flacher werdende Windungen, bis sie sich mehr und mehr wie eine Schraubenlinie verhält. In grob mechanischer Weise kann man dieselbe dadurch entstanden denken, daß eine logarithmische Spirale an ihrem Auge erfaßt in geeigneter Weise derart auseinandergezogen wird, daß ihr asymptotischer Punkt schließlich in eine Gerade übergeht.

Da bei dem vorliegenden Beispiel mit der Nebenbedingung $\varrho = a e^{k\sigma}$ unter den zu verbiegenden ebenen Gebilden die Zykloide auftritt, liegt es nahe, zu untersuchen, ob die logarithmische Spirale nicht auch bei einer speziellen Lösung des vorhergehenden Falles mit der natürlichen Gleichung

$$\varrho = a \sin k\sigma \quad \text{bzw.} \quad \varrho = a\,\mathfrak{Sin}\,k\sigma$$

in Erscheinung tritt. Dort ging ja die erste Polarkurve in jedem

Fall aus einer Zykloide bzw. Pseudozykloide ohne Spitzen hervor. Es ergaben sich die beiden allgemeinen Integrale:

$$\tau = ak(1-k^2)\int \frac{\cos k\sigma}{\sqrt{(m^2-a^2k^4)+a^2k^2(k^2-1)\cos^2 k\sigma}}\,d\sigma$$

und

$$\tau = ak(1+k^2)\int \frac{\mathfrak{Cof}\, k\sigma}{\sqrt{(m^2+a^2k^4)-a^2k^2(k^2+1)\mathfrak{Cof}^2 k\sigma}}\,d\sigma .$$

Ist hierin

$$a^2k^2(k^2-1) = -(m^2-a^2k^2)$$

bzw.

$$a^2k^2(1+k^2) = (m^2+a^2k^2),$$

so ergibt sich für den Abstand der zugeordneten A.-Kurve

$$m = ak\sqrt{2-k^2} \quad \text{bzw.} \quad m = iak^2 \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Damit folgt aus den obenstehenden allgemeinen Quadraturen

$$\tau = \frac{ak(1-k^2)}{\sqrt{m^2-a^2k^2}}\int \operatorname{ctg} k\sigma\, d\sigma = \frac{1}{k}\sqrt{1-k^2}\,\ln[\sin k\sigma]$$

und

$$\tau = \frac{ak(1+k^2)}{\sqrt{m^2-a^2k^2}}\int \mathfrak{Ctg}\, k\sigma\, d\sigma = \frac{i}{k}\sqrt{1+k^2}\,\ln[\mathfrak{Sin}\, k\sigma] ,$$

wofür man auch die folgenden Gleichungen schreiben kann:

$$e^{k_1\tau} = \sin k\sigma \quad \text{bzw.} \quad e^{ik_2\tau} = \mathfrak{Sin}\, k\sigma \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Diese natürlichen Gleichungen zeigen, daß die Ausgangskurve in beiden Fällen eine logarithmische Spirale ist, die unter Beibehaltung der Krümmung zu einer Raumkurve aufzubiegen ist.

Man erkennt aus dem ersten der in (23) gefundenen Ausdrücke, daß dieser Sonderfall dem Beispiel mit der Ausgangsbedingung $\varrho = ae^{k\sigma}$ völlig entspricht. Auf diesem Wege läßt sich auch angeben, welchen Wert für eine bestimmte Konstante k der Abstand der beiden zusammengehörigen A.-Kurven annimmt. Der Umstand, daß hier die logarithmische Spirale als Ausgangskurve und die Zykloide als erste Polarkurve auftritt, ist für A.-Kurven, bei denen die geraden Polarkurven mit denen ungerader Ordnung abwechseln, ohne Bedeutung.

Aus (22) ergibt sich, daß für den zweiten der hier betrachteten Sonderfälle keine reelle Kurve mehr existiert. Es wird entweder der Abstand m der zugeordneten A.-Kurven imaginär, oder die Größe a, womit dann schon die zu verbiegende ebene Kurve nicht mehr reell wäre. Analog wie bei den aus $\varrho = a\,\mathfrak{Sin}\, k\sigma$ her-

vorgehenden A.-Schraubenlinien handelt es sich in diesem Falle also um imaginäre A.-Kurven, auf deren Betrachtung hier nicht weiter eingegangen werden soll. —

4. A.-Kurven mit der Zusatzbedingung $\tau = \varphi(\sigma)$. Wenn das die zu betrachtende A.-Kurve eindeutig bestimmende Gesetz in Form einer Funktion $\tau = \varphi(\sigma)$ gegeben ist, so kommt man mit der im zweiten Abschnitt (Gl. 35) gefundenen allgemeinen Gleichung

$$h = m(a\lambda + b\mu + c\nu)$$

zum Ziel. Diese liefert für den Krümmungsradius der gesuchten A.-Kurve den Ausdruck

$$\varrho = m\int(a\lambda + b\mu + c\nu)\,d\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Bezeichnet man nun die auf das Binormalenbild sich beziehenden Bestimmungsstücke mit dem Index 1, so stehen zur Bestimmung desselben die beiden folgenden Gleichungen zur Verfügung:

$$\varrho_1 = |\cos H| = \frac{|d\sigma|}{\sqrt{d\sigma^2 + d\tau^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi'^2(\sigma)}}$$

$$\varrho_1 = \sin\sigma_1 = \sin H.$$

Das A.-Problem reduziert sich damit auf die Bestimmung der kartesischen Koordinaten einer Raumkurve, deren beide natürliche Gleichungen gegeben sind. Diese Aufgabe läßt sich mit Hilfe einer Riccatischen Differentialgleichung[1]) leisten. Da es sich im vorliegenden Fall aber um eine sphärische Kurve, und zwar um das Binormalenbild einer Raumkurve handelt, kommt man auch noch auf einem etwas anderen Wege zum Ziel.

Jede auf der Einheitskugel liegende Kurve läßt sich in folgender Form darstellen[2]):

$$x = \lambda\cos\sigma - l\sin\sigma$$
$$y = \mu\cos\sigma - m\sin\sigma$$
$$z = \nu\cos\sigma - n\sin\sigma.$$

Handelt es sich dabei um die Indikatrix der Binormalen, so wird

$$\lambda = \lambda_1\cos H - l_1\sin H$$
$$\mu = \mu_1\cos H - m_1\sin H$$
$$\nu = \nu_1\cos H - n_1\sin H,$$

---

1) Man vgl. etwa: Scheffers, Anwendung der Differential- u. Integralrechnung auf Geometrie. 1910, Bd. I, S. 211 ff.

2) Serret, Sur quelques formules à la théorie des courbes à double courbure. Journ. d. Math., T. XVI (1851).

wofür man auch die folgenden Ausdrücke schreiben kann:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \lambda_1 \cos H - \frac{d\lambda_1}{dH} \sin H \\ \mu &= \mu_1 \cos H - \frac{d\mu_1}{dH} \sin H \\ \nu &= \nu_1 \cos H - \frac{d\nu_1}{dH} \sin H \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (25)$$

Unter Benutzung der Funktion $\varphi(\sigma)$ ergibt sich:

$$\cos H = \frac{1}{\sqrt{1+\varphi'^2(\sigma)}}; \qquad \sin H = \frac{\varphi'(\sigma)}{\sqrt{1+\varphi'^2(\sigma)}}$$

$$dH = d \arccos\left[\frac{1}{\sqrt{1+\varphi'^2(\sigma)}}\right] = \frac{\varphi''(\sigma)\, d\sigma}{1+\varphi'^2(\sigma)}.$$

Zur Bestimmung der Richtungskosinus λ_1, μ_1, ν_1 hat man also die folgenden Gleichungen:

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 = 1$$

$$d\lambda_1^2 + d\mu_1^2 + d\nu_1^2 = \frac{\varphi''^2(\sigma)\, d\sigma^2}{[1+\varphi'^2(\sigma)]^2},$$

damit lassen sich dieselben durch λ_1 und σ zum Ausdruck bringen. Es wird nämlich

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 &= \sqrt{1-(\lambda_1^2+\nu_1^2)} \\ d\mu_1 &= \frac{-2(\lambda_1 d\lambda_1 + \nu_1 d\nu_1)}{\sqrt{1-(\lambda_1^2+\nu_1^2)}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (26)$$

Daraus folgt die nachstehende Differentialgleichung

$$d\lambda_1^2 + \frac{4(\lambda_1 d\lambda_1 + \nu_1 d\nu_1)^2}{1-(\lambda_1^2+\nu_1^2)} + d\nu_1^2 = \frac{\varphi''^2(\sigma)\, d\sigma^2}{[1+\varphi'^2(\sigma)]^2} \quad \ldots \quad (27)$$

Die Auflösung derselben liefert in Verbindung mit (26) zwei Funktionen der folgenden Art:

$$\mu_1 = \psi_1(\sigma_1 \lambda_1)$$
$$\nu_1 = \psi_2(\sigma_1 \lambda_1).$$

Setzt man diese in (25) ein, so folgen drei weitere Funktionen von λ_1 und σ, etwa:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= f_1(\sigma, \lambda_1) \\ \mu &= f_2(\sigma, \lambda_1) \\ \nu &= f_3(\sigma, \lambda_1) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (28)$$

Daraus kann man eine weitere Differentialgleichung herleiten

$$d\sigma^2 = [df_1(\sigma, \lambda_1)]^2 + [df_2(\sigma, \lambda_1)]^2 + df_3(\sigma, \lambda_1)]^2.$$

Diese gibt das zwischen λ_1 und σ bestehende Abhängigkeitsverhältnis

$$\lambda_1 = t(\sigma) \quad \ldots \quad (29)$$

Unter Benutzung von (29) lassen sich die Koordinaten des Binormalenbildes dann schließlich als Funktionen der einzigen Variabeln σ darstellen:

$$\lambda = F_1(\sigma)$$
$$\mu = F_2(\sigma)$$
$$\nu = F_3(\sigma).$$

Mit deren Hilfe ergibt sich für den Krümmungsradius der gesuchten A.-Kurve der folgende Ausdruck

$$\varrho = mf[aF_1(\sigma) + bF_2(\sigma) + cF_3(\sigma)]d\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Die analytisch formalen Schwierigkeiten dieser Behandlung des A.-Problems sind erheblich. Entweder handelt es sich um eine Riccatische Differentialgleichung, deren Lösung man nur in wenigen Fällen kennt, oder aber um die nicht minder schwierige Auflösung der in (27) aufgestellten quadratischen Differentialgleichung. Ganz abgesehen ist dabei dann noch von der Ausführungsmöglichkeit der Quadraturen in (30).

5. A.-Kurven, die einer vorgegebenen anderen Raumkurve parallel sind. Das A.-Problem liefert auch in den Fällen eindeutig bestimmte Gebilde, in denen eine andere Raumkurve bekannt ist, der die zu betrachtende Raumkurve parallel sein soll. Da Kurven, die sich durch parallele Tangenten auf einander beziehen lassen, gleiche Krümmungswinkel haben, so kommt diese Art der Nebenbedingung im wesentlichen auf die Angabe der Funktion $\tau = \varphi(\sigma)$ hinaus.

Die parallele Raumkurve sei etwa gegeben in Form einer Parameter-Darstellung:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t) \, .$$

Mit Hilfe der Formeln von Frenet-Serret lassen sich daraus durch formale Rechnung die Richtungskosinus der Binormalen bestimmen. Man hat

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt,$$

daraus ergibt sich

$$\alpha = x'(t)\frac{dt}{ds}; \quad \beta = y'(t)\frac{dt}{ds}; \quad \gamma = z'(t)\frac{dt}{ds};$$

$$d\tau = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}.$$

Damit sind die Richtungskosinus der Hauptnormalen bekannt; es wird

$$l = \frac{d\alpha}{d\tau}; \quad m = \frac{d\beta}{d\tau}; \quad n = \frac{d\gamma}{d\tau};$$

mit Hilfe elementarer Formeln bestimmen sich sodann die Richtungen der Binormalen

$$\lambda = \beta n - \gamma m; \qquad \mu = \gamma l - \alpha n; \qquad \nu = \alpha m - \beta l.$$

Nachdem dieser Rechnungsgang, dessen wirklicher Durchführung sich meist unüberwindliche Schwierigkeiten entgegenstellen, in jedem besonderen Falle ausgeführt ist, erhält man die gesuchten Richtungskosinus als Funktion des Parameters t, etwa:

$$\lambda = f_1(t)$$
$$\mu = f_2(t)$$
$$\nu = f_3(t).$$

Diese Werte werden nunmehr in die allgemeine Gleichung (30) eingesetzt und liefern folgende Quadratur:

$$\varrho = m \int [a f_1(t) + b f_2(t) + c f_3(t)] \sqrt{f_1'^2(t) + f_2'^2(t) + f_3'^2(t)}\, dt.$$

Die Ausführung derselben bestimmt den Krümmungsradius als Funktion des Parameters t $\qquad \varrho = F(t)$;

mit Hilfe des Integrals $\qquad \sigma = \int \sqrt{f_1'^2(t) + f_2'^2(t) + f_3'^2(t)}\, dt$

läßt sich derselbe dann auch als Funktion von σ darstellen.

Die Angabe einer zu der gesuchten A.-Kurve parallelen Raumkurve führt gegenüber der Vorgabe einer Funktion $\varphi(\sigma)$ insofern etwas weiter, als man, nachdem ϱ bestimmt ist, mit Hilfe der für parallel zugeordnete Raumkurven geltenden Relationen [1])

$$x = \int \frac{\varrho}{\bar{\varrho}}\, d\bar{x}; \qquad y = \int \frac{\varrho}{\bar{\varrho}}\, d\bar{y}; \qquad z = \int \frac{\varrho}{\bar{\varrho}}\, d\bar{z}$$

auch die kartesischen Koordinaten der A.-Kurve angeben kann.

Dieser Weg, aus dem A.-Problem mit Hilfe parallel zugeordneter Raumkurven zu greifbaren Resultaten zu gelangen, deckt sich im wesentlichen mit der schon von R. Hoppe eingeschlagenen Methode.[2])

Man kann die Aufsuchung von A.-Kurven noch weiterhin dadurch vereinfachen, daß man die Koordinaten einer bestimmten sphärischen Kurve angibt, die das Binormalenbild der gesuchten Kurve bildet. Dieser Weg soll bei den A.-Schrauben- und A.-Böschungslinien, deren Untersuchung die beiden nächsten Abschnitte gewidmet sind, eingeschlagen werden.

---

1) Salkowski, Sitzber. d. Berl. math. Ges. 1905, S. 64—69.
2) Archiv f. Math. u. Physik. 1881 (66), S. 386—396.

IV.

Aoustsche Schraubenlinien.

Um zu den Aoustschen Schraubenlinien zu gelangen, geht man aus von ihrem Binormalenbild. Dieses ist — wie allgemein für jede Kurve konstanter Steigung — ein kleiner Kugelkreis. Man kann das Problem aber zunächst in der Weise verallgemeinern, daß man A.-Kurven betrachtet, deren Binormalenbild ein sphärischer Kegelschnitt ist. Diesen kann man darstellen als Schnitt der Kugel mit einem Zylinder zweiten Grades.

Die ebenen Kegelschnitte sind definiert durch die Polargleichung

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos\varphi}.$$

Hierin ist $\varepsilon = 0,\ 1,\ -a,\ a$ zu setzen, je nachdem, ob es sich um einen Kreis, eine Parabel, eine Ellipse oder Hyperbel handelt.

Aus der Polargleichung der Kegelschnitte ergeben sich die kartesischen Koordinaten der Durchschnittskurve eines geraden Kegelschnittzylinders mit der Einheitskugel. Man erhält

$$x = \frac{p\cos\varphi}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$$

$$y = \frac{p\sin\varphi}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$$

$$z = \sqrt{1 - \frac{p^2}{(1 - \varepsilon\cos\varphi)^2}}.$$

Diese liefern

$$dx = dr\cos\varphi - r\sin\varphi\, d\varphi$$

$$dy = dr\sin\varphi + r\cos\varphi\, d\varphi$$

$$dz = -\frac{r\,dr}{\sqrt{1 - r^2}}.$$

Für das Bogenelement findet man

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2$$

oder

$$ds = \frac{p\,d\varphi}{1 - \varepsilon\cos\varphi}\sqrt{\frac{\varepsilon\sin^2\varphi}{(\tau - \varepsilon\cos\varphi)^2 - p^2} + 1}.$$

Unter Benutzung der oben abgeleiteten allgemeinen Formel

$$\varrho = m\int(a\lambda + b\mu + c\nu)\,d\sigma$$

ergibt sich für die A.-Kurven, deren Binormalenbild ein sphärischer Kegelschnitt ist, der folgende Ausdruck:

$$\varrho = mp\int\left\{\left[\frac{a\cos\varphi}{(1-\varepsilon\cos\varphi)^2}+\frac{b\sin\varphi}{(1-\varepsilon\cos\varphi)^2}+\frac{c\sqrt{(1-\varepsilon\cos\varphi)^2-p^2}}{(1-\varepsilon\cos\varphi)^2}\right]\sqrt{\frac{\varepsilon\sin^2\varphi}{(1-\varepsilon\cos\varphi)^2-p^2}+p^2}\right\}d\varphi \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Die Auflösung dieser Quadraturen erfordert elliptische Funktionen. Beschränkt man sich auf einen Kreiszylinder, so wird $\varepsilon = 0$ und (1) geht über in

$$\varrho = mp\int(a\cos\varphi + b\sin\varphi + c\sqrt{1-p^2})\,d\varphi \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Die Integration liefert als natürliche Gleichung der A.-Schraubenlinien den Ausdruck

$$\varrho = amp\sin\varphi - bmp\cos\varphi + cmp\sqrt{1-p^2}\cdot\varphi + C \quad . \quad (3)$$

Stellt man hierin noch weiter die Bedingung, daß der A.-Zylinder mit dem Schraubenzylinder zusammenfallen soll, so wird

$$a = 0, \qquad b = 0, \qquad c = 1;$$

damit folgt als natürliche Gleichung dieser A.-Schraubenlinie

$$\varrho = cmp\sqrt{1-p^2}\cdot\varphi + d,$$

hierin kann bei entsprechender Wahl des Integrationsausgangspunktes ohne Bedenken $d = 0$ gesetzt werden. Sodann ergibt sich aus (4) für den Orthogonalschnitt des betreffenden Schraubenzylinders

$$\bar{\varrho} = A\cdot\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Es handelt sich also um die Evolvente eines Kreises, einen Sachverhalt, den man folgendermaßen zum Ausdruck bringen kann:

Diejenigen A.-Schraubenlinien, für welche der A.-Zylinder mit dem Schraubenzylinder zusammenfällt, liegen als Kurven konstanter Steigung auf einem Zylinder, dessen Basiskurve eine Kreisevolvente ist.

Setzt man in Gleichung (3)

$$mp\sqrt{a^2+b^2} = A; \qquad \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\varphi_1; \qquad cmp\sqrt{1-p^2} = B$$

so folgt $$\varrho = A\sin(\varphi-\varphi_1) + B\varphi + C$$

oder nach entsprechender Drehung des Koordinatensystems und etwas anderer Konstantenbezeichnung

$$\varrho = A\sin\varphi + B\varphi + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Beachtet man nun noch, daß im vorliegenden Fall der Polarwinkel des Binormalenbildes mit dem Schmiegungswinkel der Kurve selbst durch die Relation

$$\varphi = k\sigma; \qquad k = \frac{1}{\cos\alpha}$$

in Beziehung steht, so kann man für (5) auch schreiben

$$\varrho = A \sin k\sigma + B\sigma + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Im speziellen Fall der Schraubenlinien kann man übrigens auch aus dem oben abgeleiteten allgemeinen Kriterium für A.-Kurven

$$\frac{dh}{dh_0} = \frac{d\sigma}{d\tau}$$

neue Erkenntnisse gewinnen. Verbindet man hiermit die allgemein für jede Schraubenlinie geltende Relation

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = -\operatorname{tg}\alpha,$$

so ergibt sich

$$h_0 = -h \cdot \operatorname{tg}\alpha + a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Mit Hilfe schon mehrfach angewandter Beziehungen folgt aus (7)

$$\frac{d\varrho_0}{-d\tau} = -\frac{d\varrho}{d\sigma}\operatorname{tg}\alpha + a,$$

daraus folgt unter Benutzung der Schraubenbedingung

$$d\varrho_0 = -d\varrho \operatorname{tg}^2\alpha + a \operatorname{tg}\alpha \, d\sigma.$$

Durch Integration geht diese Gleichung über in

$$\varrho_0 + \varrho \operatorname{tg}^2\alpha = a \operatorname{tg}\alpha \cdot \sigma + b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Benutzt man nun den für den Krümmungsradius der ersten Polarkurve geltenden Wert

$$\varrho_0 = \left| \varrho + \frac{dh}{d\sigma} \right|,$$

so erhält man aus (8)

$$\varrho (1 + \operatorname{tg}^2\alpha) + \frac{d^2\varrho}{d\sigma^2} = a\sigma + b.$$

Als Bedingungsgleichung für A.-Schraubenlinien ergibt sich damit ein linearer Differentialausdruck zweiter Ordnung

$$\varrho + \cos^2\alpha \frac{d^2\varrho}{d\sigma^2} - a\sigma \cos^2\alpha + b\cos^2\alpha = 0.$$

Diese Gleichung ist integrierbar und liefert in Übereinstimmung mit (6) die natürliche Gleichung der A.-Schraubenlinien

$$\varrho = A \sin k\sigma + B\sigma + C; \qquad k = \frac{1}{\cos\alpha}.$$

Die Rektifikation der A.-Schraubenlinien gelingt mit Hilfe der aus (6) folgenden Gleichung

$$\varrho = \int (A \sin k\sigma + B\sigma + C)\, d\tau,$$

es wird

$$s = \operatorname{tg}\alpha \, (A \cos k\sigma + B\sigma^2 - C\sigma + D).$$

Für den Abstand des Mittelpunktes der Schmiegungskugeln vom Krümmungsmittelpunkt ergibt sich

$$h = Ak \cos k\sigma + B.$$

Einfache Formeln ergeben sich auch für die Bestimmungsstücke der ersten Polarkurve. Aus (6) findet man durch leichte Rechnung für den Radius der ersten Krümmung

$$\varrho_0 = A(1-k^2)\sin k\sigma + B\sigma + C$$

und daraus für den Abstand h_0 des Mittelpunktes der Schmiegungskugeln vom zugehörigen Krümmungsmittelpunkt

$$h_0 = Ak(1-k^2)\cos k\sigma + B.$$

Für die Bogenlänge der ersten Polarkurve findet sich

$$s_0 = A(k^2-1)\cos k\sigma + B\sigma + C.$$

Da man den Krümmungsradius jeder Kurve, solange es sich um natürliche Koordinaten handelt, als Summe der Krümmungsradien derjenigen Kurven darstellen kann, aus denen sie durch Summation hervorgeht[1]), erkennt man aus Gleichung (6), daß die A.-Schraubenlinien durch Verbiegung aller ebenen Kurven hervorgehen, die aus den Einzelkurven mit der natürlichen Gleichung:

$\varrho_1 = A\sin k_1\omega$	allgemeine Zykloide
$\varrho_2 = B\omega$	Kreisevolvente
$\varrho_3 = C$	Kreis

hervorgehen. Diese Tatsache läßt sich durch folgenden Satz zum Ausdruck bringen:

Die A.-Schraubenlinien entstehen dann, und nur dann, wenn man einen Kreis, eine Kreisevolvente, eine Zykloide oder die durch Kombination dieser drei Kurven hervorgehenden ebenen Kurven isoflexional zu Raumkurven konstanter Steigung aufbiegt.

Die natürliche Gleichung der A.-Schraubenlinien läßt übrigens auch erkennen, in welcher Weise dieselben aus den Komponenten-Kurven hervorgehen.

Es seien in Fig. 13 (A), (B) und (C) drei beliebige, unter einander parallel zugeordnete Raumkurven. Verbindet man entsprechende Punkte A_1, B_1, C_1 dieser Kurven miteinander, so erfüllen die Schwerpunkte $P_1, P_2, P_3 \ldots$ konsekutiver Dreiecke $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ . . . . eine Raumkurve, die man vielleicht kurz als „Schwerpunktskurve“ von (A), (B) und (C) bezeichnen kann.

Sind nun der Reihe nach ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 und ds_1, ds_2, ds_3 die Krümmungsradien und Bogenelemente von (A), (B) und (C), so

1) L. Braude, Les Coordonnées intrinsèques, Paris 1914, S. 31.

folgt aus den allgemein für parallele Raumkurven geltenden Beziehungen[1])

$$\varrho_m = \frac{m\varrho_2 + n\varrho_1}{m+n},$$

$$ds_m = \frac{m\,ds_2 + n\,ds}{m+n},$$

für die von D_1, D_2, D_3 . . . bestimmte Mittelkurve (D):

$$\varrho_D = \tfrac{1}{2}(\varrho_1 + \varrho_2); \qquad ds_D = \tfrac{1}{2}(ds_1 + ds_2).$$

Mit Hilfe dieser Zwischenwerte ergibt sich für die Schwerpunktskurve (P) selbst

$$\varrho = \tfrac{1}{3}(\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3); \qquad ds = \tfrac{1}{3}(ds_1 + ds_2 + ds_3).$$

Man erkennt also, daß die A.-Schraubenlinien sich darstellen lassen als Schwerpunktskurven dreier paralleler Schraubenlinien, die ihrerseits durch die natürlichen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \varrho_1 &= 3\,C \\ \varrho_2 &= 3\,B\sigma \\ \varrho_3 &= 3\,A\sin k\sigma \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

bestimmt werden.

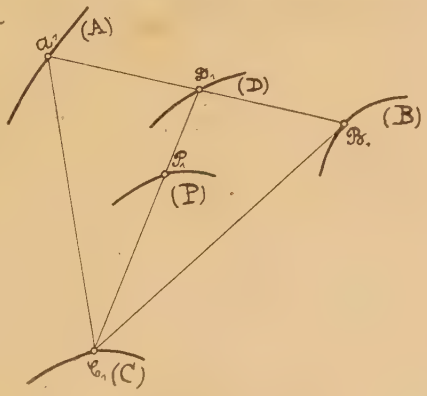

Fig. 13.

Diese speziellen Schraubenlinien sollen noch genauer betrachtet werden.

Zunächst ergibt sich aus (9), daß unter den „Einzelschraubenlinien" keine von algebraischer Art vorkommen. Mithin können auch bei ihrer Kombination keine algebraischen Kurven auftreten, was man folgendermaßen zum Ausdruck bringen kann:

Unter den A.-Schraubenlinien kommen keine algebraischen Kurven vor.

Die Art einer Schraubenlinie läßt sich am genauesten erkennen, wenn man den Orthogonalschnitt des Zylinders angibt, auf dem sie als geodätische Kurve liegt. Der Krümmungsradius desselben steht mit dem Krümmungsradius der Schraubenlinie selbst in einer überaus einfachen Beziehung. Bezeichnet man den Krümmungsradius und das Bogenelement der Zylinderbasiskurve mit $\bar{\varrho}$

1) Schell-Salkowski a. a. O. S. 177.

bzw. $d\bar{s}$, so gilt allgemein für jede Schraubenlinie mit dem konstanten Steigungswinkel α [1])

$$\bar{\varrho} = \varrho \sin^2 \alpha$$
$$d\bar{s} = ds \sin \alpha .$$

Beachtet man nun ferner, daß der Tangentenwinkel des Orthogonalschnittes sich aus der Relation

$$\omega = k\sigma$$

bestimmen läßt, so folgen aus (9) die natürlichen Gleichungen der Basiskurven. Es wird:

$$\left.\begin{aligned} (S_1):\ \bar{\varrho}_1 &= 3\,C \sin^2 \alpha \\ (S_2):\ \bar{\varrho}_2 &= 3\,B \cos\alpha \sin^2 \alpha\, \omega \\ (S_3):\ \bar{\varrho}_3 &= 3\,A \sin^2 \alpha \sin \omega \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Hiervon liegt, wie man aus der ersten Gleichung erkennt, (S_1) als Schraubenlinie konstanter Krümmung auf einem Kreiszylinder mit dem Grundkreisradius:

$$r = 3\,C \sin^2 \alpha .$$

Sie gehört als Kurve konstanter Krümmung an sich zu den A.-Kurven. Ihre kartesischen Koordinaten lassen sich darstellen durch

$$\left.\begin{aligned} x &= 3\,C \sin^2 \alpha \cdot \cos\varphi \\ y &= 3\,C \sin^2 \alpha \cdot \sin\varphi \\ z &= 3\,C \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \varphi \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Für ihre Bogenlänge erhält man

$$s = \frac{3\,C}{\sin \alpha}\,\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Die Projektionskurve der zweiten Schraubenlinie ist aus der Bedingung

$$\varrho_2 = 3\,B \cos\alpha \sin^2 \alpha \cdot \omega$$

als Evolvente eines Kreises mit dem Radius

$$r = 3\,B \cos\alpha \sin^2 \alpha$$

erkennbar. Für die kartesischen Koordinaten derselben erhält man die folgende Parameterdarstellung:

$$\left.\begin{aligned} x &= 3\,B \cos\alpha \sin^2 \alpha\,(\cos\omega + \omega \sin\omega) \\ y &= 3\,B \cos\alpha \sin^2 \alpha\,(\sin\omega - \omega \cos\omega) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (13a)$$

es sind gleichzeitig die beiden ersten Koordinaten der Schraubenlinie selbst. Verbindet man hiermit die Mongesche Differentialgleichung für allgemeine Schraubenlinien:

$$dx^2 + dy^2 = dz^2 \operatorname{tg}^2 \alpha ,$$

1) Schell-Salkowski a. a. O. S. 110.

so folgt für die dritte Koordinate

$$z = \tfrac{3}{2} B \cos^2\alpha \sin\alpha\, \omega^2 + c \quad . \quad . \quad . \quad (13b)$$

Aus (13a, b) erkennt man mit leichter Mühe, daß die Werte x, y, z die Gleichung eines Rotationsparaboloides

$$x^2 + y^2 = 2p;$$

mit vertikaler Achse erfüllen, wenn

$$p = 3B \sin^3\alpha$$

gesetzt wird. Daraus erhellt, daß die Kurve (S_3) bestimmt ist als Schnitt eines geraden Kreisevolventen-Zylinders mit einem Rotationsparaboloid[1]), dessen Achse den Zylindererzeugenden parallel ist. Auf beiden Flächen ist (S_2) Schraubenlinie.

Die Bogenlänge derselben ergibt sich aus (13a). Es ist nämlich allgemein für jede Schraubenlinie

$$s = \frac{z}{\cos\alpha},$$

es folgt mithin für (s):

$$s = \tfrac{3}{2} B \sin\alpha \cos\alpha \cdot \omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Die Tafsache, daß (S_2) auf einem Kreisevolventenzylinder liegt, läßt sich noch auf etwas anderem Wege erkennen.

Aus der natürlichen Gleichung von (S_2) folgt, daß ihr Krümmungsradius eine lineare Funktion von σ ist. Wegen der Schraubenbedingung folgt daraus, daß er dann auch in linearer Weise von τ abhängig ist. Als Erweiterung des Puiseuxschen Problems, demzufolge Schraubenlinien mit konstanter Krümmung auf Kreiszylindern liegen, läßt sich der allgemeinere Satz folgenden Inhalts beweisen:

Ist für eine Raumkurve der Krümmungsradius gleichzeitig lineare Funktion des Kontingenz- und Schmiegungswinkels, so ist sie Schraubenlinie auf einer Zylinderfläche, deren Basiskurve eine Kreisevolvente ist.

Daraus folgt unmittelbar, daß es sich im zweiten Fall um eine Kreisevolventen-Schraubenlinie handelt.

Die Basiskurve der dritten hier in Frage kommenden speziellen Schraubenlinie ist bestimmt durch die natürliche Gleichung

$$\varrho = 3A \sin^2\alpha \cdot \sin\omega.$$

---

1) Die Schraubenlinien auf Rotationsparaboloiden sind vielfach untersucht worden und z. B. in der Dissertation von Frieda Nugel, Die Schraubenlinien, Eine monographische Darstellung. Halle 1912. S. 54 ff. mit eingehenden Literaturangaben genauer dargestellt.

Diese stellt eine Zykloide dar, und zwar eine gemeine Zykloide, deren auf einer Geraden abrollender Kreis den Radius

$$r = \tfrac{3}{4} A \sin^2 \alpha$$

besitzt. Die kartesischen Koordinaten derselben ergeben sich mit Hilfe ihres Polarwinkels in der Form

$$\left.\begin{aligned} x &= \tfrac{3}{4} A \sin^2 \alpha\,(2\varphi - \sin 2\varphi) \\ y &= \tfrac{3}{4} A \sin^2 \alpha\,(1 - \cos 2\varphi) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (15)$$

Um die dritte Koordinate der auf dem Zykloidenzylinder liegenden Schraubenlinie zu finden, geht man am besten von der Bogenlänge dieser Kurve aus.[1] Es wird

$$s_3 = 3 A \sin^2 \alpha \int \sin \varphi \, d\tau$$

oder auch

$$s_3 = 3 A \sin \alpha \cos \omega \quad \ldots \quad (16)$$

Durch Multiplikation mit dem sin des konstanten Neigungswinkels ergibt sich daraus

$$z = 3 A \sin^2 \varphi \cos \varphi \quad \ldots \quad (17)$$

Zur Feststellung der zweiten Fläche, der (S_2) angehört, setze man den aus (17) folgenden Wert

$$\cos \varphi = \frac{z}{3 A \sin^2 \alpha}$$

in (15) ein. Es ergibt sich nach einigen Umformungen

$$z^2 = \tfrac{3}{2} A \sin^2 \alpha\,(3 A \sin^2 \alpha - 2y).$$

Diese Gleichung stellt einen parabolischen Zylinder dar, dessen Erzeugenden der x-Achse, d. h. also im vorliegenden Fall der Geraden parallel sind, auf welcher der die Zykloide erzeugende Kreis abrollt. Die Achse der Parabel des Orthogonalschnitts ist den Erzeugenden des Zykloidenzylinders parallel.

Faßt man die erhaltenen Ergebnisse zusammen, so folgt der Satz:

Die A.-Schraubenlinien sind Schwerpunktskurven dreier einander parallel zugeordneter Kurven konstanter Steigung, die der Reihe nach auf einem geraden Kreisevolventen-, Zykloiden- und Kreiszylinder liegen.

Nimmt man hierzu noch die Flächen, welche durch ihren Schnitt mit dem Schraubenzylinder die oben genannten drei Kurven erzeugen, so kommen für die Bestimmung der A.-Schraubenlinien im ganzen sechs Flächen in Betracht. Von diesen sind drei algebraischer Art, nämlich Kreiszylinder, Rotationsparaboloid und parabolischer Zylinder; die drei anderen sind transzendent, es sind dies der Kreisevolventen-, Zykloiden- und Sinuslinien-Zylinder.

1) G. Loria, Spezielle ebene Kurven, Leipzig 1911, S. 57.

Die Auffassung dieser Art bleibt auch richtig, wenn zwei von den speziellen Schraubenlinien zu Punkten degenerieren. In diesen Fällen erhält man als spezielle A.-Schraubenlinien die gewöhnliche Kreiszylinderhelix, und ferner die Kurven konstanter Steigung auf Rotationsparaboloiden und parabolischen Zylindern mit horizontalen Erzeugenden.[1])

Die kartesischen Koordinaten und die Bogenlänge der allgemeinen A.-Schraubenlinien ergeben sich schließlich durch Zusammenstellung der in (11) bis (17) erhaltenen Teilergebnisse. Es wird

$$x = \sin^2\alpha\left[\cos 2\varphi\,(C + B\cos\alpha) + \sin 2\varphi\left(\varphi\cdot 2B\cos\alpha - \frac{A}{4}\right) + \frac{A}{4}\right]$$

$$y = \sin^2\alpha\left[\sin 2\varphi\,(C + B\cos\alpha) - \cos 2\varphi\left(\varphi\cdot 2B\cos\alpha + \frac{A}{4}\right) + \frac{A}{4}\right]$$

$$z = \cos\varphi\left[A\sin^2\alpha + \varphi^2\cdot\frac{B}{2}\cos\alpha\sin\alpha\right] + \varphi\cdot 2C\operatorname{ctg}^2\alpha$$

$$s = [A\cos\varphi + B\varphi^2 + C\varphi + D]\sin\alpha.$$

Diese Werte stimmen, abgesehen von der veränderten Konstantenbezeichnung, welche den Zusammenhang mit dem Steigungswinkel besser hervortreten läßt, mit den im Abschnitt I gefundenen Ergebnissen überein.

V.

Aoustsche Böschungslinien.[2])

Als „Böschungslinie" soll im folgenden eine Raumkurve bezeichnet werden, die auf einer abwickelbaren Fläche, deren Tangentenebenen mit einer festen Richtung einen konstanten Winkel bilden, geodätisch ist. Die Flächen, auf denen diese Kurven liegen, sind als „Böschungsflächen" bekannt und können als Tangentenflächen von Schraubenlinien aufgefaßt werden. Böschungslinien, welche der A.-Bedingung genügen, mögen kurz als „A.-Böschungslinien" bezeichnet werden.

Um zu einer Darstellung der A.-Böschungslinien zu kommen, geht man, wie bei den A.-Schraubenlinien, am besten aus von ihrer sphärischen Abbildung.

Die Gratlinie der Böschungsfläche ist eine Schraubenlinie, mithin stimmen die rektifizierenden Geraden jeder Böschungslinie

1) Vgl. E. Salkowski, Sitzungsber. d. Berl. math. Ges. 1907, S. 54.

2) Vgl. Fußnote S. 32.

mit den Tangenten einer Schraubenlinie überein. Daraus folgt, daß das Bild der rektifizierenden Geraden einer Böschungslinie ein kleiner Kugelkreis ist. Mit dem Bild der rektifizierenden Geraden sind aber auch die Bilder der Tangenten und Binormalen gegeben.

Es gilt nämlich für jede Raumkurve der Satz, daß die Bildkurve der Tangenten und Binormalen je eine sphärische Evolvente des Bildes der rektifizierenden Geraden[1]) ist. Man gelangt also zu diesen Bildkurven bei der Böschungslinie, indem man auf einem festen kleinen Kugelkreis einen größten Kugelkreis abrollen läßt. Als Sonderfall der sphärischen Epizykloide entstehen dabei die sphärischen Schraubenlinien. Für jede Böschungslinie ist mithin die Indikatrix der Tangenten und Binormalen je eine sphärische Schraubenlinie.

Daraus kann man zunächst in einfacher Weise die allgemeine Gleichung für die Geodätischen auf Böschungsflächen herleiten. Sie folgt aus der natürlichen Gleichung, die für Kurven konstanter Steigung auf der Kugel gilt.

Verbindet man die allgemeinen Gleichungen für Kurven auf der Einheitskugel[2])

$$\varrho^2 + \left[\frac{d\varrho}{ds}\right]^2 = 1$$

mit derjenigen der Schraubenlinien

$$\frac{\varrho}{r} = -\operatorname{ctg}\alpha,$$

so folgt nach einigen Umformungen

$$\varrho^2 + \operatorname{ctg}^2\alpha \cdot s^2 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Da nun die Bogenelemente von Tangenten- und Binormalenbild bzw. gleich dem Kontingenz- und Torsionswinkel sind, ergeben sich aus (1) die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \varrho_1^2 + \tau^2 \operatorname{ctg}^2\alpha_1 &= 1 \\ \varrho_2^2 + \sigma^2 \operatorname{ctg}^2\alpha_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Hierin sind ϱ_1 und ϱ_2 die Krümmungsradien der Tangenten- und Binormalen-Indikatrix, für die in jedem Fall die Relation[3])

$$\varrho_1^2 + \varrho_2^2 = 1$$

erfüllt sein muß. Beachtet man nun ferner, daß als sphärische Evolventen derselben Kurve die Bilder der Tangenten und Binormalen einander parallele Kurven sind, so folgt, da man nur

1) Schell-Salkowski a. a. O. S. 65.
2) Ebenda S. 113.
3) Rühlemann, Über sphärische Kurven, Diss., Halle 1919, S. 14.

Schraubenlinien gleicher Steigung durch parallele Tangenten aufeinander beziehen kann: $\alpha_1 = \alpha_2$.

Damit erhält man aus (2) $1 + (\tau^2 + \sigma^2)\operatorname{ctg}^2\alpha = 2$,

wofür man auch die folgende Gleichung schreiben kann:

$$\tau^2 + \sigma^2 = \operatorname{tg}^2\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Diese für jede Böschungslinie gültige Gleichung wurde auf etwas anderem Wege bereits von Aoust[1]) aufgestellt. Bei ihm werden die Böschungslinien als „Cykliden" bezeichnet und als besondere Kurvenklasse den Schraubenlinien zur Seite gestellt.

Mit (3) ist die Nebenbedingung der zu betrachtenden A.-Kurve in der Form $\tau = \varphi(\sigma)$ gegeben.[2]) Es kommt also darauf an, die kartesischen Koordinaten des Binormalenbildes zu kennen. Im vorliegenden Fall ergeben sich dieselben leicht als Koordinaten einer sphärischen Schraubenlinie. Man gelangt zu ihrer expliziten Darstellung am besten wieder mit Hilfe der parallelen Zuordnung einer gewöhnlichen Kreiszylinderhelix auf einem Rotationszylinder mit dem Grundkreisradius 1. Für diese ist:

$$x' = \cos k\sigma'; \quad y' = \sin k\sigma'; \quad z' = \frac{1}{\sin\alpha}\sigma' \quad . \quad . \quad (4)$$

daraus folgt mit Hilfe der Formeln von Frenet-Serret

$$\varrho' = k^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

hierin ist α der konstante Steigungswinkel der Schraubenlinie und

$$k = \frac{1}{\cos\alpha}.$$

Für alle parallel zugeordneten Kurven gelten die schon oben in Anwendung gekommenen Formeln:

$$\bar{x} = \int \frac{\bar{\varrho}}{\varrho'}\, dx'; \quad \bar{y} = \int \frac{\bar{\varrho}}{\varrho'}\, dy'; \quad \bar{z} = \int \frac{\bar{\varrho}}{\varrho'}\, dz'.$$

Da es sich hier um die Schraubenlinien auf der Kugel handeln soll, wird

$$\bar{\varrho} = \sin\sigma',$$

und man erhält unter Einsetzung von (4) und (5):

$$\bar{x} = -\frac{1}{k}\int \sin\sigma' \sin k\sigma'\, d\sigma'$$

$$\bar{y} = \frac{1}{k}\int \sin\sigma' \cos k\sigma'\, d\sigma'$$

$$\bar{z} = \frac{1}{k^2 \sin\alpha}\int \sin\sigma'\, d\sigma'.$$

---

1) M. Aoust, Analyse infinitésimale des courbes dans l'espace, Paris 1876, S. 126.

2) Vgl. S. 59 ff.

Hierin lassen sich die Funktionsprodukte in bekannter Weise in Summen zerlegen, worauf sich durch Ausführung der Integration nach einigen Umformungen für die Koordinaten der sphärischen Schraubenlinie folgende Ausdrücke ergeben:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{4}\cos^2\alpha\left\{\frac{\sin(k-1)\sigma'}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{\sin(k+1)\sigma'}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right\} \\ y &= \frac{1}{4}\sin^2\alpha\left\{\frac{\cos(k-1)\sigma'}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{\cos(k+1)\sigma'}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right\} \\ z &= -\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\cos\sigma' \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (6)$$

Will man nunmehr zur Darstellung der A.-Böschungslinien übergehen, so ist zu beachten, daß $d\sigma'$ der Schmiegungswinkel des Binormalenbildes ist. Er steht mit der Ausgangskurve in jedem Fall in Beziehung durch die Gleichung[1])

$$d\sigma' = \varepsilon dH,$$

wobei H der Winkel ist, den die Kurventangente mit der rektifizierenden Geraden bildet, und zwar ist $\varepsilon = \pm 1$, je nachdem, ob es sich um eine Kurve positiver oder negativer Torsion handelt. Da für Kurven mit negativer Torsion ganz analoge Formeln gelten, die sich nur durch andere Vorzeichen unterscheiden, sollen die folgenden Untersuchungen auf Böschungslinien positiver Torsion beschränkt werden.

Mit Hilfe der im II. Abschnitt allgemein abgeleiteten Formel

$$\varrho = m\int(a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z})d\sigma$$

erhält man unter Verwendung von (6) die natürliche Gleichung der A.-Böschungslinien. Es wird:

$$\varrho = \frac{m}{4}\cos^2\alpha\int\left[\frac{a\sin(k-1)H + b\cos(k-1)H}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{a\sin(k+1)H + b\sin(k-1)H}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{4c}{\sin\alpha}\cdot\cos H\right]d\sigma \quad \ldots \quad (7)$$

1) Rühlemann, Diss., Halle 1919, S. 15.

Um die Integration ausführen zu können, ist $d\sigma$ durch dH auszudrücken. Nach Gleichung (3) ist für jede Böschungslinie

$$\tau = \sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha - \sigma^2}$$

oder auch

$$d\tau = \frac{-\sigma}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha - \sigma^2}} d\sigma \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

daraus folgt mit Hilfe des Lancretschen Satzes

$$dk = \pm \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha - \sigma^2}} d\sigma .$$

Anderseits ist nun aber für jede Raumkurve[1])

$$\sin H = \frac{d\tau}{dk},$$

damit erhält man: $\sin H = -\sigma \operatorname{ctg}\alpha$.

Durch Differentiation folgt hieraus

$$d\sigma = -\operatorname{tg}\alpha \cos H dH \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Mit diesem Wert folgt aus (7) das nachstehende Integral:

$$\varrho = -\frac{m}{8} \sin 2\alpha \int \left[\frac{a \sin(k-1)H + b\cos(k-1)H}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{a\sin(k+1)H + b\cos(k+1)H}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{4c}{\sin\alpha}\cos H \right] \cos H dH \quad \ldots \quad (10)$$

Diese Integration ist leicht ausführbar. Unter Benutzung von elementaren Formeln wird zunächst

$$\varrho = -m\frac{\sin 2\alpha}{16\sin^2\frac{\alpha}{2}} \int \{a[\sin kH + \sin(k-2)H] + b[\cos kH + \cos(k-2)H]\} dH$$

$$+ m\frac{\sin 2\alpha}{16\cos^2\frac{\alpha}{2}} \int \{a[\sin kH + \sin(k+2)H] + b[\cos kH + \cos(k+2)H]\} dH$$

$$+ m\frac{c}{2}\cos\alpha \int \{1 + \cos 2H\} dH .$$

1) Schell-Salkowski a. a. O. S. 30.

Daraus erhält man durch Integration den Krümmungsradius der A.-Böschungslinien in der Form:

$$\left.\begin{aligned}\varrho = &-\frac{\sin 2\alpha}{16\sin^2\frac{\alpha}{2}}\left[\frac{1}{k-2}\left[b\sin(k-2)H - a\cos(k-2)H\right]\right.\\ &\qquad\left.+\frac{1}{k}\left[b\sin kH + a\cos kH\right]\right]m\\ &+\frac{\sin 2\alpha}{16\cos^2\frac{\alpha}{2}}\left[\frac{1}{k+2}\left[b\sin(k+2)H - a\cos(k+2)H\right]\right.\\ &\qquad\left.+\frac{1}{k}\left[b\sin kH - a\cos kH\right]\right]m\\ &+\frac{mc}{2}\cos\alpha\left[H+\frac{1}{2}\sin 2H\right]+\text{const.}\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

Das Problem werde nun zunächst auf den Fall spezialisiert, daß die Erzeugenden des A.-Zylinders mit der Achse der rektifizierenden Gratlinie parallel sind. Unter dieser Annahme wird

$$a=0;\quad b=0;\quad c=1$$

und aus der allgemeinen Gleichung (11) folgt

$$\varrho=\frac{m}{4}\cos\alpha\left[\sin 2H+2H+d\right]\quad\ldots\quad(12)$$

Es sei an dieser Stelle auf die Analogie mit dem für den Krümmungsradius der A.-Schraubenlinien geltenden Ausdruck hingewiesen. An Stelle des Schmiegungswinkels tritt hier der Winkel zwischen Kurventangente und rektifizierender Gratlinie als unabhängige Variable auf.

Um hierin H durch den Kontingenzwinkel ausdrücken zu können, benutze man die in (8) gefundene Relation. Mit ihrer Hilfe wird

$$\cos H=-\frac{d\sigma}{dk}=\frac{\tau}{\operatorname{tg}\alpha},$$

man erhält also

$$H=\arccos\frac{\tau}{\operatorname{tg}\alpha};\quad\sin 2H=2\operatorname{ctg}^2\alpha\,\tau\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha-\tau^2}\,.$$

Damit geht (12) über in

$$\varrho=A\arccos\frac{\tau}{c}+B\tau\sqrt{c^2-\tau^2}+C\quad\ldots\quad(13a)$$

oder wenn der Schmiegungswinkel als unabhängige Variable gewählt wird

$$\varrho=A\arccos\left[\frac{1}{c}\sqrt{c^2-\sigma^2}\right]+B\sigma\sqrt{c^2-\sigma^2}+C\quad\ldots\quad(13b)$$

Hierin ist zur Abkürzung

$$A = \frac{m}{2}\cos\alpha\,; \quad B = \frac{m}{2}\cos\alpha\,\mathrm{ctg}^2\alpha\,; \quad C = \frac{md}{4}\cos\alpha\,; \quad c = \mathrm{tg}\,\alpha\,.$$

gesetzt worden.

Die Bestimmung der Bogenlänge der A.-Böschungslinie erfordert die Ausführung des folgenden Integrals:

$$s = \int \left\{ A \arccos\frac{\tau}{c} + B\tau\sqrt{c^2-\tau^2} + C \right\} d\tau\,;$$

dieses liefert

$$s = A\tau\arccos\frac{\tau}{c} + A\sqrt{c^2-\tau^2} - \frac{B}{3}(c^2-\tau^2)\sqrt{c^2-\tau^2} + C\tau + D\,;$$

setzt man hierin

$$a^2 = A - \frac{B}{3}c^2,$$

so erhält man für die Bogenlänge einer A.-Böschungslinie den folgenden Ausdruck:

$$s = A\tau\arccos\frac{\tau}{c} + (a^2+\tau^2)\sqrt{c^2-\tau^2} + C\tau + D \quad . \quad . \quad (15)$$

Für den Torsionsradius ergibt sich aus (14)

$$r = \left[A\arccos\frac{\tau}{c} + B\tau\sqrt{c^2-\tau^2} + C \right]\frac{d\tau}{d\sigma}\,;$$

führt man hierin den schon oben für Böschungslinien allgemein bestimmten Wert $d\sigma$ ein, so folgt

$$r = -\frac{A}{\tau}\sqrt{c^2-\tau^2}\cdot\arccos\frac{\tau}{c} + B\tau^2 = Bc^2 - \frac{c}{\tau}\sqrt{c^2-\tau^2}\,.$$

Zur Abkürzung mögen die folgenden Konstanten eingeführt werden:

$$A_1 = B\,; \quad B_1 = A\,; \quad C\frac{c}{A} = b\,; \quad Bc^2 = C\,;$$

damit folgt für den Radius der zweiten Krümmung

$$r = A_1\tau^2 - \frac{B_1}{\tau}\sqrt{c^2-\tau^2}\left[\arccos\frac{\tau}{c} + b\right] + C_1 \quad . \quad . \quad . \quad (16\,a)$$

bzw., wenn der Schmiegungswinkel als unabhängige Veränderliche gewählt wird,

$$r = A_1(c^2-\sigma^2) - B_1\frac{\sigma}{\sqrt{c^2-\sigma^2}}\left[\arccos\left(\frac{1}{c}\sqrt{c^2-\sigma^2} + b\right)\right] + C_1 \quad (16\,b)$$

Um die Art der A.-Böschungslinien noch genauer zu erkennen, möge ihre rektifizierende Schraubenlinie näher untersucht werden.

Die rektifizierende Gratlinie einer Raumkurve, d. h. die Gratlinie der durch die rektifizierenden Ebenen eingehüllten Fläche wird

von den rektifizierenden Geraden gebildet. Bezeichnet man die auf dieselbe sich beziehenden Bestimmungsstücke mit dem Index 3, so gilt allgemein für jede Raumkurve [1])

$$|d\sigma_3| = dk; \quad d\tau_3 = |dH|; \quad \varrho_3 = \frac{+1}{\sin H}\left|\frac{dp}{dH}\right| \quad . \quad . \quad (17)$$

Hierbei ist p die Länge des Lotes, das von einem Punkte der rektifizierenden Gratlinie auf die zugehörige Tangente der Ausgangskurve gefällt wird. Der Wert von p bestimmt sich aus

$$p = \frac{ds}{dH}\sin^2 H = \varrho\frac{d\tau}{dH}\sin^2 H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Aus (8) und (9) ergibt sich allgemein für Böschungslinien:

$$d\tau = -\frac{\sigma}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha - \sigma^2}}d\sigma; \qquad d\varrho = -\operatorname{tg}\alpha\cos H\,dH;$$

$$\cos H = \operatorname{ctg}\alpha\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha - \sigma^2}; \qquad \sin H = -\sigma\operatorname{ctg}\alpha.$$

Für die rektifizierende Schraubenlinie derselben wird also

$$\frac{d\tau}{dH} = -\operatorname{tg}^3\alpha\sin H,$$

damit erhält man für die Länge des Lotes p

$$p = -\varrho\cdot\operatorname{tg}^3\alpha\sin^3 H.$$

Durch Differentiation folgt

$$\left|\frac{dp}{dH}\right| = \operatorname{tg}^3\alpha\left\{\sin^3 H\cdot\frac{d\varrho}{dH} + 3\varrho\cdot\sin^2 H\cos H\right\};$$

setzt man diesen Wert in (17) ein, so folgt für die rektifizierende Gratlinie jeder Geodätischen auf Böschungsflächen

$$\varrho_3 = \operatorname{tg}^3\alpha\left\{\sin^2 H\cdot\frac{d\varrho}{dH} + \frac{3}{2}\varrho\sin 2H\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Handelt es sich nun im besonderen um A.-Böschungslinien, deren A.-Zylinder eine mit der rektifizierenden Schraubenlinie parallele Achse hat, so folgt unter Benutzung des für dieselben in (12) gefundenen Krümmungsradius

$$\frac{d\varrho}{dH} = \frac{m}{2}\cos\alpha\,(1+\cos 2H) = m\cos\alpha\cdot\cos^2 H$$

oder

$$\varrho_3 = m\sin\alpha\operatorname{tg}^2\alpha\left[\sin^2 H\cos^2 H + \tfrac{3}{8}\sin^2 2H + \tfrac{3}{4}H\sin 2H + \tfrac{3}{8}d\sin 2H\right].$$

Nach einigen Umformungen geht diese Gleichung schließlich über in

$$\varrho_3 = \frac{m}{8}\sin\alpha\operatorname{tg}^2\alpha\left[5\sin 2H + 6H + 3d\right]\sin 2H \quad . \quad (20)$$

1) Schell-Salkowski a. a. O. S. 69ff.

Will man den Krümmungsradius der rektifizierenden Schraubenlinie durch ihren eigenen Kontingenzwinkel zum Ausdruck bringen, so erhält man aus (20) unter Benutzung von (17)

$$\varrho_3 = \frac{m}{8} \sin\alpha \operatorname{tg}^2\alpha \,[5 \sin 2\tau_3 + 6\tau_3 + 3d] \sin 2\tau_3 \quad . \quad . \quad (21)$$

Den konstanten Steigungswinkel der rektifizierenden Schraubenlinie bestimmt man aus (17). Es wird

$$|\operatorname{tg}\alpha_1| = \frac{|d\sigma_3|}{d\tau} = \frac{dk}{|dH|},$$

oder unter Verwendung der oben abgeleiteten Werte

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Die rektifizierende Schraubenlinie der Böschungslinien hat mithin die konstante Steigung $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Der Steigungswinkel ihrer Polarkurve ist also α, womit sich der bekannte und geometrisch evidente Satz ergibt:

Die Böschungslinien mit der natürlichen Gleichung $\tau^2 + \sigma^2 = \operatorname{tg}^2\alpha$ *sind Filarevoluten einer Schraubenlinie mit der konstanten Steigung* α.

Will man nun die Basiskurve der in (21) dargestellten Schraubenlinie ermitteln, so beachte man, daß der Kontingenzwinkel jeder Kurve konstanter Steigung mit dem Tangentenwinkel ihrer Zylinderbasiskurve durch die Relation

$$d\omega = \frac{d\tau}{\sin\alpha}$$

in Beziehung steht. Im vorliegenden Fall wird wegen der Neigung $\frac{\pi}{2} - \alpha$ der Tangentenwinkel des Zylinder-Orthogonalschnittes $\omega = \frac{\tau}{\cos\alpha}$.

Setzt man nun noch zur Abkürzung

$$\tfrac{5}{8} m \sin\alpha \operatorname{tg}^2\alpha = A; \quad \tfrac{3}{4} m \operatorname{tg}^3\alpha = B; \quad \tfrac{3}{8} m d \sin\alpha \operatorname{tg}^2\alpha = C; \quad \frac{2}{\cos\alpha} = k,$$

so erhält man aus (21) für die natürliche Gleichung der Basiskurve den Ausdruck:

$$\bar{\varrho}_3 = A \sin^2 k\omega + B\omega \sin k\omega + C \sin k\omega \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Es handelt sich mithin im einzelnen um drei ebene Kurven:

$$\left.\begin{aligned} \bar{\varrho}' &= \tfrac{1}{3} A \sin^2 k\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (P_1) \\ \bar{\varrho}'' &= \tfrac{1}{3} B\omega \sin k\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (P_2) \\ \bar{\varrho}''' &= \tfrac{1}{3} C \sin k\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (P_3) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

die noch näher zu charakterisieren sind. Genau ebenso wie oben bei den A.-Schraubenlinien ist die gesuchte Basiskurve der geome-

trische Ort der Schwerpunkte derjenigen konsekutiven Dreiecke, die durch einander zugeordnete Punkte der Kurven (P_1), (P_2) und (P_3) bestimmt werden.

Für die erste der drei Kurven kann man auch schreiben

$$\varrho' = \tfrac{1}{6} A\,(1 - \cos 2k\omega),$$

sie setzt sich also zusammen aus einem Kreise und einer Epizykloide. Man kann sie aber auch noch in etwas anderer Weise charakterisieren.

Sind allgemein ω und ϱ die Bestimmungsstücke der Ursprungskurve, so gilt für die erste Evolute derselben [1])

$$\varrho_1 = \frac{d\varrho}{d\omega}.$$

Gemäß (23) wird mithin die erste Evolute von (P_1) bestimmt durch die natürliche Gleichung

$$\varrho'_1 = \tfrac{1}{3} A \sin 2k\omega,$$

es ist eine Epizykloide. Kehrt man den Gedankengang um, so kann man (P_1) als Evolvente einer Epizykloide auffassen.

Die zweite Gleichung [2])

$$\varrho'' = \tfrac{1}{3} B\omega \sin k\omega$$

stellt eine transzendente Kurve dar, die als eine gewisse Verallgemeinerung einer Kreisevolvente zweiten Grades angesehen werden kann. Im Grenzfall $k = 0$, der allerdings hier wegen $k = \dfrac{2}{\cos\alpha}$ ausgeschlossen ist, wird sie mit einer solchen identisch.

Mit Hilfe ihrer natürlichen Gleichung gelingt es leicht sich ein Bild von ihrer ungefähren Gestalt zu machen. Für die Argumentenwerte

$$\omega = \frac{n}{k}\pi; \quad n = 1, 2, 3 \ldots\ldots$$

besitzt sie Spitzen. Die Koordinaten derselben sind:

$$u = \frac{B}{2}\left[\frac{1}{(k+1)^2}\sin\left(\frac{k+1}{k}n\pi\right) + \frac{1}{(k-1)^2}\sin\left(\frac{k-1}{k}n\pi\right) - \frac{nk}{k(k+1)}\cos\left(\frac{k+1}{k}n\pi\right) - \frac{n\pi}{k(k-1)}\cos\left(\frac{k-1}{k}n\pi\right)\right],$$

$$v = -\frac{B}{2}\left[\frac{1}{(k+1)^2}\cos\left(\frac{k+1}{k}n\pi\right) + \frac{1}{(k-1)^2}\cos\left(\frac{k-1}{k}n\pi\right) - \frac{n\pi}{k(k+1)}\sin\left(\frac{k+1}{k}n\pi\right) - \frac{n\pi}{k(k-1)}\sin\left(\frac{k-1}{k}n\pi\right)\right].$$

1) E. Cesàro, a. a. O. S. 34.

2) L. Braude, Les coordonnées intrinsèques, Paris 1914, S. 39.

Die Entfernung der Spitzen vom Ursprung bestimmt sich aus

$$r = \frac{B}{2}\sqrt{\frac{a^2 n^2 \pi^2}{k^2} + b^2},$$

wenn

$$a^2 = \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k-1)^2}; \quad b^2 = \frac{1}{(k+1)^4} + \frac{1}{(k-1)^4}$$

gesetzt wird. Man erkennt also, daß mit wachsendem Winkel ω die Entfernung der Spitzen mehr und mehr zunimmt, bis sie in der Unendlichkeit verschwinden.

Für die Werte

$$\omega = \frac{(2n+1)}{k} \cdot \frac{\pi}{2}; \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ldots$$

nimmt der Krümmungsradius jedesmal ein lokales Maximum an, um dann wieder abzunehmen. Die Kurve besteht aus einzelnen Zweigen von der Länge

$$\bar{s}'' = \frac{B}{3}\int_{\frac{n-1}{k}\pi}^{\frac{n\pi}{k}} \omega \sin k\omega = \frac{B}{3}\left[-\frac{\omega}{k}\cos k\omega + \frac{\sin k\omega}{k^2}\right]_{\frac{n-1}{k}\pi}^{\frac{n\pi}{k}} = \frac{B}{3k^2}.$$

Diese sind nach Art einer Epizykloide bogenförmig auf einer gewissen Spirale angeordnet.

Man kann die Kurve (P)

$$\bar{\varrho}'' = \frac{B}{3}\omega \sin k\omega$$

indessen auch noch in einer etwas anderen Weise interpretieren.

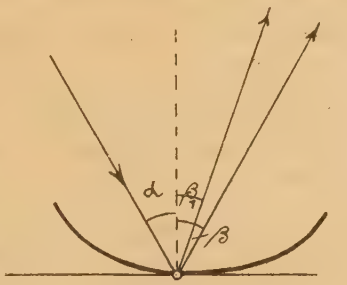

Fig. 14.

Läßt man auf eine beliebige Kurve (P) (Fig. 14), die man sich als Spiegel denkt, ein Bündel paralleler Lichtstrahlen auffallen, so umhüllen die reflektierten Strahlen die sogenannte Katakaustik[1]) oder Brennlinie der Kurve (P). Schreibt man abweichend von dem in der Natur befolgten optimalen Reflexionsgesetz $\beta = \alpha$ ein beliebiges Gesetz der Zurückstrahlung vor, demzufolge der Ausfallswinkel ein beliebiger Teil des Einfallswinkels ist, etwa $\beta_1 = n\alpha$, so umhüllen die reflektierten Strahlen des parallelen Bündels eine sogenannte Kaustikoide[2]) von (P).

1) G. Loria, Spezielle ebene Kurven, 2. Aufl., Bd. II, S. 300.

2) G. Loria a. a. O., Bd. II, S. 309.

Sind nun von (P) die natürlichen Koordinaten ω und ϱ gegeben, so bestimmt sich die natürliche Gleichung der Kaustikoide aus[1])

$$\left.\begin{aligned} \varrho' &= \frac{1}{(1+n)^2}[\varrho_1 \sin(n\omega - \varphi) + (2n+1)\,\varrho \cos(n\omega - \varphi)] \\ \omega' &= (n+1)\,\omega \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

φ ist hierbei der Winkel, den die Strahlen des Lichtbündels mit der x-Achse bilden. Setzt man ihn im vorliegenden Fall gleich 0, so wird

$$\varrho' = \frac{1}{(1+n)^2}\left[\varrho_1 \sin\left(\frac{n}{n+1}\right)\omega' + (2n+1)\,\varrho \cos\left(\frac{n}{n+1}\right)\omega'\right] \quad (25)$$

Mit $$\varrho_1 = \frac{d\varrho}{d\omega}$$

ist dabei der Krümmungsradius bezeichnet, der die Evolute der Ausgangskurve kennzeichnet.

Es möge nunmehr die Kaustikoide einer Kreisevolvente betrachtet werden. Aus $\varrho = a\omega$

folgt mit Hilfe von (25)

$$\varrho' = \frac{a}{(1+n)^2}\left[\sin\left(\frac{n}{n+1}\,\omega'\right) + \frac{2n+1}{n+1}\,\omega' \cos\left(\frac{n}{n+1}\,\omega'\right)\right] \quad (26)$$

Sucht man nun anderseits die erste Evolute der Kurve (P), so folgt aus (23) $$\varrho_1'' = \tfrac{1}{3} B[\sin k\omega + \omega k \cos k\omega] \quad (27)$$

Aus (26) und (27) erkennt man, daß bei entsprechender Wahl der Konstanten die Kurve (P_2) als die erste Evolvente einer Kreisevolventenkaustikoide angesehen werden kann.

Die dritte der in (23) geforderten Teilkurven ist leicht bestimmbar, es ist eine Epizykloide.

Die erhaltenen Ergebnisse kann man wie folgt zusammenfassen:

Die A.-Böschungslinien, deren A.-Zylinder eine mit der Achse der rektifizierenden Gratlinie parallele Erzeugende hat, liegen auf den Tangentenflächen derjenigen Schraubenlinien, die als Zylinder-Basiskurve den geometrischen Ort der Schwerpunkte der konsekutiven Dreiecke aufweisen, die durch einander zugeordnete Punkte einer Epizykloide, der Evolventen einer Epizykloide und der Evolventen einer Kreisevolventenkaustikoide bestimmt werden.

1) L. Braude a. a. O. S. 41.

Verallgemeinert man das Problem nun wieder insofern, als man eine A.-Böschungslinie mit beliebigem A.-Zylinder betrachtet, so treten neue Kurven dabei nicht auf.

Aus der allgemeinen Formel in (11) folgt:

$$\frac{d\varrho}{dH} = -\frac{m\sin 2\alpha}{16\sin^2\frac{\alpha}{2}}[b\cos(k-2)H + a\sin(k-2)H + b\cos kH + a\sin kH]$$
$$+\frac{m\sin 2\alpha}{16\cos^2\frac{\alpha}{2}}[b\cos(k+2)H + a\sin(k-2)H + b\cos kH + a\sin kH]$$
$$+\frac{mc}{4}\cos\alpha\,[2+2\cos 2H\,];$$

setzt man diesen Wert in (19) ein, so folgt für die rektifizierende Schraubenlinie einer A.-Böschungslinie mit beliebiger Stellung des A.-Zylinders der folgende, keineswegs einfache Ausdruck:

$$\varrho_3 = \frac{m\sin 2\alpha}{32\sin^2\frac{\alpha}{2}}\left\{[b\cos(k-2)H + a\sin(k-2)H + b\cos kH + a\sin kH\,]\,2\sin^2 H\right.$$
$$\left. + 3\sin 2H\left[\frac{1}{k-2}(b\sin(k-2)H - a\cos(k-2)H) + \frac{1}{k}(b\sin kH - a\cos kH)\right]\right\}\operatorname{tg}^3\alpha$$
$$+\frac{m\sin 2\alpha}{32\cos^2\frac{\alpha}{2}}\left\{2\sin^2 H[b\cos(k+2)H + a\sin(k+2)H + b\cos kH + a\sin kH]\right.$$
$$\left. + 3\sin 2H\left[\frac{1}{k+2}(b\sin(k+2)H - a\cos(k+2)H) + \frac{1}{k}(b\sin kH - a\cos kH)\right]\right\}\operatorname{tg}^3\alpha \quad (28)$$
$$+\frac{mc}{8}\sin\alpha\operatorname{tg}^2\alpha[5\sin 2H + 6H + 3d]\sin 2H$$

Schreibt man hierin $1-\cos 2H$ an Stelle von $2\sin^2 H$, so zeigt die Betrachtung der beiden ersten Klammern, die bei der Verallgemeinerung des Problems zu der bereits behandelten letzten Klammer hinzutreten, daß nur noch die Produkte der trigonometrischen Funktionen auftreten. Diese besitzen die Argumente $(k+2)H$, $(k-2)H$, kH und $2H$; man kann sie in elementarer Weise immer in Summen von Sinus- und Kosinus-Funktionen mit den Argumenten kH, $(k-2)H$, $(k+2H)$, $(k-4)H$, $(k+4)H$ zerlegen. Die Einzelkurven, die man dabei erhält, sind also immer Zykloiden, und zwar, je nach dem Faktor der Variabeln H, gemeine, Epi- oder

Hypozykloiden. Dieses Ergebnis kann folgendermaßen zum Ausdruck gebracht werden:

Die allgemeinen A.-Böschungslinien liegen auf den Tangentenflächen derjenigen Schraubenlinien, deren Zylinderbasiskurve sich durch Summation einer Reihe von Zykloiden mit der Evolvente einer Zykloide und der Evolvente einer Kreisevolventenkaustikoide erzeugen lassen.

Da die Zykloide als solche schon bei dem spezialisierten Problem auftrat, das die Erzeugende des A.-Zylinders mit der Achse der rektifizierenden Schraubenlinie parallel stellt, möge die weitere Betrachtung der A.-Böschungslinien auf diesen Fall beschränkt bleiben.

Um die kartesischen Koordinaten der drei die rektifizierende Gratlinie bildenden Einzelschraubenlinien, deren Gleichungen der Reihe nach gemäß (20) wie folgt sind:

$$\left.\begin{aligned} (S_1):&\quad \varrho_{,} = \tfrac{5}{8}\, m \sin\alpha \operatorname{tg}^2\alpha \sin^2 2\tau \\ (S_2):&\quad \varrho_{,,} = \tfrac{3}{4}\, m \sin\alpha \operatorname{tg}^2\alpha\tau \sin 2\tau \\ (S_3):&\quad \varrho_{,,,} = \tfrac{3}{8}\, md \sin\alpha \operatorname{tg}^2\alpha \sin 2\tau \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (29)$$

zu bestimmen, bedient man sich der parallelen Zuordnung einer Kreiszylinderhelix mit dem Grundkreisradius 1. Die Steigung dieser Schraubenlinie ist im vorliegenden Fall $\frac{\pi}{2} - \alpha$, ihre Koordinaten lassen sich also darstellen durch

$$x' = \cos\left(\frac{\tau}{\cos\alpha}\right); \quad y' = \sin\left(\frac{\tau}{\cos\alpha}\right); \quad z' = \frac{\tau}{\sin\alpha}; \quad \varrho' = \frac{1}{\sin^2\alpha};$$

setzt man zur Abkürzung wieder

$$k = \frac{1}{\cos\alpha},$$

so wird $dx' = -k \sin k\tau\, d\tau$; $dy' = k \cos k\tau\, d\tau$; $dz' = \frac{d\tau}{\sin\alpha}$.

Für die erste der in (29) charakterisierten Schraubenlinien ergeben sich die Integrale

$$x_1 = -\frac{5}{16} m \frac{\sin\alpha \operatorname{tg}^2\alpha}{\sin^2\alpha \cos\alpha} \int (\sin k\tau - \cos 4\tau \sin k\tau)\, d\tau$$

$$y_1 = \frac{5}{16} m \frac{\sin\alpha \operatorname{tg}^2\alpha}{\sin^2\alpha \cos\alpha} \int (\cos k\tau - \cos 4\tau \cos k\tau)\, d\tau$$

$$z_1 = \frac{5}{16} m \frac{\sin\alpha \operatorname{tg}^2\alpha}{\sin^2\alpha \sin\alpha} \int (1 - \cos 4\tau)\, d\tau.$$

Die Ausführung der Integration liefert für die kartesischen Koordinaten von (S_1) die folgenden Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{5}{16} m \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\alpha}\left[\frac{1}{k}\cos k\tau + \frac{1}{2(k+4)}\cos(k+4)\tau - \frac{1}{2(k-4)}\cos(k-4)\tau\right] \\ y_1 &= \frac{5}{16} m \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\alpha}\left[\frac{1}{k}\sin k\tau - \frac{1}{2(k+4)}\sin(k+4)\tau - \frac{1}{2(k-4)}\sin(k-4)\tau\right] \\ z_1 &= \frac{5}{16} m \frac{1}{\cos^2\alpha}\left[\tau - \frac{1}{4}\sin 4\tau\right] \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Für die zweite Schraubenlinie erhält man nachstehende Quadraturen:

$$x_2 = -\frac{3}{4} m \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\alpha}\int \tau \sin 2\tau \sin k\tau \, d\tau$$

$$y_2 = \frac{3}{4} m \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\alpha}\int \tau \sin 2\tau \cos k\tau \, d\tau$$

$$z_2 = \frac{3}{4} m \frac{1}{\cos^2\alpha}\int \tau \sin 2\tau \, d\tau$$

Nach Ausführung der Integration wird:

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \frac{3}{8} m \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\alpha}\left[\frac{\tau}{k+2}\sin(k+2)\tau + \frac{1}{(k+2)^2}\cos(k+2)\tau\right. \\ &\qquad \left. - \frac{\tau}{k-2}\sin(k-2)\tau - \frac{1}{(k-2)^2}\cos(k-2)\tau\right] \\ y_2 &= -\frac{3}{8} m \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\alpha}\left[\frac{\tau}{k+2}\cos(k+2)\tau - \frac{1}{(k+2)^2}\sin(k+2)\tau\right. \\ &\qquad \left. + \frac{\tau}{k-2}\cos(k-2)\tau - \frac{1}{(k-2)^2}\sin(k-2)\tau\right] \\ z_2 &= \frac{3}{4} m \frac{1}{\cos^2\alpha}\left[\sin 2\tau - \frac{\tau}{2}\cos 2\tau\right] \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Die Koordinaten der Schraubenlinie (S_3) werden schließlich durch die folgenden Gleichungen erhalten:

$$x_3 = \frac{3}{8} m d \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\alpha}\int \sin 2\tau \sin k\tau \, d\tau$$

$$y_3 = \frac{3}{8} m d \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\alpha}\int \sin 2\tau \cos k\tau \, d\tau$$

$$z_3 = \frac{3}{8} m d \frac{1}{\cos^2\alpha}\int \sin 2\tau \, d\tau :$$

Aus diesen bestimmt man:

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= \frac{3}{16} m d \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\alpha}\left[\frac{1}{k+2}\sin(k+2)\tau - \frac{1}{k-2}\sin(k-2)\tau\right] \\ y_3 &= -\frac{3}{16} m d \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\alpha}\left[\frac{1}{k+2}\cos(k+2)\tau + \frac{1}{k-2}\cos(k+2)\tau\right] \\ z_3 &= -\frac{3}{16} m d \frac{1}{\cos^2\alpha}\cos 2\tau \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Die Flächen, auf denen die Schraubenlinien (S_1), (S_2) und (S_3) Kurven konstanter Steigung sind, lassen sich nur bestimmen, wenn für k ein bestimmter Wert angegeben wird.

Lebenslauf.

Heinrich Hampel wurde geboren am 28. Juli 1894 zu Leopoldshall (Anhalt) als Sohn des Betriebsführers Karl Hampel und seiner Ehefrau Franziska geborene Dinslage. Er besuchte zunächst die Elementarschule seines Heimatortes, dann die Bürgerschule zu Staßfurt und schließlich das Herzogliche Karls-Realgymnasium zu Bernburg a. d. S. Hier bestand er Ostern 1914 die Reifeprüfung. Von da ab widmete er sich dem Studium der Mathematik und Naturwissenschaften an den Universitäten Breslau, Tübingen und Halle. Er hörte Vorlesungen bzw. besuchte Übungen bei den Herren Professoren und Dozenten

in Breslau:
Baumgartner, Biltz, v. Braun, Dyhrenfurth, Ehrlich, Hintze, Hönigswald, Kneser, Lummer, Pax, Sachs, Schenck, Schmidt, Schnee, Steinitz, Stern, Sturm, Weber;

in Tübingen:
Adickes, Bülow, v. Bühler, Groos, Krais, Maurer, Paschen, Spitta, Thierfelder, Trendelenburg, Weinland;

in Halle:
Frischeisen-Köhler, Grammel, Gutzmer, Menzer, Schmidt, Tubandt, Wangerin, Ziehen.

Allen seinen verehrten Lehrern ist er zu dauerndem Dank verpflichtet.